ಪ್ರಕಾಶಕರು:—
ಗ. ರಾ. ಭಟಕಳ,
ದಿ ಪೊಪ್ಯುಲರ ಬುಕ್ ಡಿಪೋ,
ಲ್ಯಾಮಿಂಗಟನ್ ರೋಡ,
ಮುಂಬಯಿ-೭

ಪ್ರಥಮ ಮುದ್ರಣ ೧೯೫೪

ಮುದ್ರಕರು:—
ಎಮ್. ಆರ್. ಸಿರೂರ,
"ಸಿರೂರ ಪ್ರಿಂಟಿಂಗ ಪ್ರೆಸ್"
೨೮ ಮಾಹಿಮವಾಲಾ ಬಂಗಲೋ,
ಖೇತವಾಡಿ ೧೨ನೇ ಲೇನ,
ಮುಂಬಯಿ-೪

ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ಕರ್ನಾಟಕ ಕಾಲೇಜ ಧಾರವಾಡ ಇಲ್ಲಿ ಕೆಲಕಾಲ ಗಣಿತ ವಿಷಯದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾಗಿದ್ದ ಶ್ರೀಮಾನ್ ಗೋ. ವಾ. ಭಾಗವತ M. A. ಮಹನೀಯರು ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆದ "Plane Geometry For Schools" ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವು ಈಗ ಅದೆಷ್ಟೋ ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ೮/೧೦ ವರುಷಗಳಿಂದ ಬಳಿಕೆಯಲ್ಲಿದೆ. ಆದರೆ ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರಿಸಬೇಕೆಂದು ಬಹುಜನ ಶಿಕ್ಷಕರ ಒತ್ತಾಯದ ಸೂಚನೆಗಳು ಬಂದದ್ದರಿಂದ, ಅವರಿಚ್ಛೆಯಂತೆ ಇದರ "ಮೊದಲನೆಯ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು" ಈ ಮೊದಲೇ ನಾವು ಅವರ ಸ್ವಾಧೀನ ಪಡಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಅದು ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕವಾಗಿ, ಹಲವೆಡೆಯಲ್ಲಿ ಸಾದರ ಸ್ವಾಗತಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಅದೆಷ್ಟೋ ಸನ್ಮಾನ್ಯರಿಂದ ಬಂದ ಸದಭಿಪ್ರಾಯಗಳೇ ಇದಕ್ಕೆ ಸಾಕ್ಷಿ.

ಈ ಎರಡನೆಯ ಪುಸ್ತಕವು ಮಾ. ಶಾಲೆಯ ೧೦ ನೆಯ ಮತ್ತು ೧೧ನೆಯ ವರ್ಗದ ಹುಡುಗರಿಗಾಗಿ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಪುಸ್ತಕದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಇದರಲ್ಲಿಯೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಮುಂಬಯಿ ಸರಕಾರದ ಹೊಸ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಭೂಮಿತಿ ವಿಷಯದ "ತಾತ್ವಿಕ ವಿವೇಚನೆ"ಯಲ್ಲಿ ನಾವು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದರಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗವು ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಗಳ ಸಲುವಾಗಿರುವದರಿಂದ ಇದು ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಭಾಗದೊಂದಿಗೆ ಮೊದಲನೆಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬಂದು ಹೋಗಿದೆ. ಉಳಿದ ೨ನೆಯ, ೩ ನೆಯ, ೪ ನೆಯ ಭಾಗಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಮೂಲತತ್ವದ ಪಾಠಗಳು ಈ ಎರಡನೆಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿವೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಆರಂಭಕ್ಕೆ ಭೂಮಿತಿಯ "ತಾತ್ವಿಕ ವಿವೇಚನೆ"ಯ ಎರಡನೆಯ ಭಾಗವಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $(\text{ಅ}' + \text{ಬ}')^{\text{೨}} = \text{ಅ}'^{\text{೨}} + \text{೨ಅ}'\text{ಬ}' + \text{ಬ}'^{\text{೨}}$ ಇಂಥ ಬೈಜಿಕ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಭೂಮಿತಿಯಿಂದ ಹೇಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟೀ-ಕರಿಸಬೇಕೆಂಬದನ್ನು ಮೊದಲು ವಿವರಿಸಿ, ನಂತರ "ಪಾಯಥಾಗೋರಸ್

ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ. ಇದರಿಂದ ಕೂಡಲೆ ಇವನ ವಿಸ್ತಾರದಂತೆ ಎರಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನೂ, "ಅಪೋಲೋನಿಅಸ್" ನ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಆ ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಪಥದ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಮೊದ-ಮೊದಲು ಬಿಂದು ಪಥದ ಕಲ್ಪನೆಯು ಸ್ವಲ್ಪ ಗಡುಚಾಗಿ ಕಂಡಲ್ಲಿ, ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಕಡೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಮತ್ತು ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ಬಿಡಿಸುವ ಏಕಾಗ್ರತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಂತರ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ತ್ರಿಕೋನ ನಿರ್ಮಿತಿಯ ವಿವೇಚನೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಪಥದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಚನ್ನಾಗಿ ವಿವರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಒಂದೊಂದು ಮಧ್ಯವರ್ತಿ ಕಲ್ಪನೆ, ಅಥವಾ ಆಕೃತಿಗಳ ಸಮಾನತೆಯಂತೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ನಮ್ಮ ಕೃತಿಯು ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಸಮ್ಮತವಾಗುವದೆಂದು ನಾವು ನಂಬುತ್ತೇವೆ.

ಮೂರನೆಯ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಗಳ ವಿವೇಚನೆಯಿದೆ. ೫೦ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಟಿಪ್ಪಣಿ, ೫೯ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನ, ಮತ್ತು ೧೭, ೧೮ ನೆಯ ಕೃತ್ಯಗಳ (ಪುಟಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿಯ) ಟಿಪ್ಪಣಿ, ಇವುಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕೆಂದು ಶಿಕ್ಷಕವೃಂದಕ್ಕೆ ನಮ್ಮದೊಂದು ಬಿನ್ನಹವಿದೆ.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮತ್ತು ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ವಿವೇಚನೆಯನ್ನು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದಲ್ಲದೆ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ "ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಮೂಲತತ್ವ" ಎಂಬ ಉಪಯುಕ್ತ ವಿಷಯವನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿ ವಿವರಿಸಿದ್ದೇವೆ. "ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ" ಇವುಗಳ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ. ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಲೋಕ ವ್ಯವಹಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ. ಮಾದರಿಗಾಗಿ ಕೆಲವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಕ್ರಮ-ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೇವಲ ಮೂರು ಗುಣೋತ್ತರ

ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಒಟ್ಟಿಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯರಿಗೆ ವಿಷಯವು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮನನವಾಗುವಂತೆ ತುಂಬಾ ಪ್ರಯತ್ನಪಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ.

ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಹಸ್ತ ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ದಯವಿಟ್ಟು ಓದಿ ಸರಿಪಡಿಸಿ, ಪುಸ್ತಕ ಮುದ್ರಿತವಾಗಿ ಮುಗಿಯುವ ವರೆಗೂ ಸಂಪೂರ್ಣ ಬೆಂಬಲವಿತ್ತ ಇಲ್ಲಿಯ ರಾಬರ್ಟಮನಿ ಟೆಕ್ನಿಕಲ್ ಹಾಯಸ್ಕೂಲದ ಶ್ರೀಮಾನ್ ಕೋಡಕಣಿ ಚಂದ್ರಶೇಖರ B. A., B. T., ಇವರನ್ನೂ, ನಮಗೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹನೆ ಕೊಟ್ಟು ಕೇವಲ ಕನ್ನಡಿಗರಿಗಾಗಿ ಇದನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿದ ಶ್ರೀಮಾನ್ ಭಟಕಳ ಗಣೇಶರಾಯರನ್ನೂ, ಅಲ್ಪಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಅಂದವಾಗಿ ಮುದ್ರಿಸಿ ಕೊಟ್ಟ ಶ್ರೀಮಾನ್ ಶಿರೂರ ಮಂಗೇಶ ರಾಯ ರನ್ನೂ ನಾವು ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಅಭಿನಂದಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಇದರ ಮೊದಲನೆಯ ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ಆಶ್ರಯವಿತ್ತಂತೆ ಇದನ್ನೂ ಸ್ವಾಗತಿಸ ಬೇಕೆಂದೂ ಪುಸ್ತಕದ ಗುಣ-ವರ್ಧನೆಗೆ ತಮಗೆ ತಿಳಿದು ಬಂದ ಸೂಚನೆ ಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಬೇಕೆಂದೂ ಶಿಕ್ಷಕರಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ವಿಜ್ಞಾಪನೆಯಿದೆ.

ಮುಂಬಯಿ.
ಎಪ್ರೀಲ, ೧೯೫೪.

ಶ್ರೀ. ದ. ಮುಜುಮದಾರ
ಅನುವಾದಕ

ಪರಿವಿಡಿ

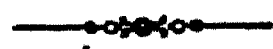
ತಾತ್ವಿಕ ವಿವೇಚನೆ

ಎರಡನೆಯ ಭಾಗ (ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮತ್ತು ಬಿಂದುಪಥ)

ಮೂರನೆಯ ಭಾಗ (ವರ್ತುಳ)

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಮೂಲ ತತ್ವಗಳು

ತಾತ್ತ್ವಿಕ ವಿವೇಚನೆ



ಎರಡನೆಯ ಭಾಗ

ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮತ್ತು ಬಿಂದುಪಥ

ಗುರುತುಗಳು

$=$	ಸರಿ ಇದೆ, ಅಥವಾ ಇರುವವು.
$\equiv$	ಏಕರೂಪ ,,
$\neq$	ಸರಿ ಇಲ್ಲ.
$+$	ಅಧಿಕ (ಕೂಡಿಸು).
$-$	ಉಣೆ (ಕಳೆ).
$\backsim$	ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ.
$\angle$, $\wedge$	ಕೋನ.
$\parallel$	ಸಮಾಂತರ ಇದೆ; ಇರುವವು. ಸಮಾಂತರ (ವಿಶೇಷಣ).
$\perp$	ಲಂಬ ಇದೆ; ಇರುವವು. ಲಂಬ (ವಿಶೇಷಣ)
$\therefore$	ಅಂದರೆ, ಆದ್ದರಿಂದ.
$\because$	ಯಾಕಂದರೆ
$\triangle$	ತ್ರಿಕೋನ.
$\odot$	ವರ್ತುಳ.
$\bigcirc$ ಜ	ಪರಿಘ.
$>$	ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವದು. ಅಥವಾ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವವು.
$<$	ಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದಾಗಿರುವದು. ಅಥವಾ ಸಣ್ಣದಾಗಿರುವವು.
$\ngtr$	ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿಲ್ಲ, ಅಥವಾ ದೊಡ್ಡವಾಗಿಲ್ಲ.
$\nless$	ಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದಿಲ್ಲ, ಅಥವಾ ಸಣ್ಣವಾಗಿಲ್ಲ.

ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ (ಸಣ್ಣವರಲ್ಲಿ)

ಅನು.	ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ
ಆ.	ಆಕೃತಿ
ಉಪಸಿ.	ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ
ಬಹು ಭು.	ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ
ಸಮದ್ವಿ.	ಸಮದ್ವಿಭುಜ
ಸಮಾ.	ಸಮಾವಿಷ್ಟ
ಸಮಾ. ಭು.ಚೌ. $\parallel$ ಭು.ಚೌ.	ಸಮಾಂತರ ಭುಜಚೌಕೋನ

ಶಾಲಾ ಭೂಮಿತಿ
ಎರಡನೆಯ ಭಾಗ

ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮತ್ತು ಬಿಂದುಪಥ

ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

೧೪ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು, ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

[ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿಯ ೧೩ ನೆಯ ಪ್ರಕರಣ ನೋಡಿರಿ.]

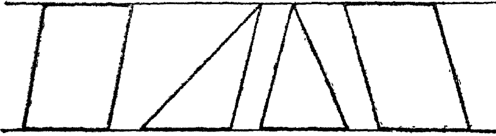
ಯಾವದೊಂದು ಆಕೃತಿಯ **ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ** ಅಂದರೆ ಅದರ ಮೇರೆಯಿಂದ ಸುತ್ತುಗಟ್ಟಿದ್ದರ ಒಳಭಾಗದ ಅಳತೆಯೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಏಕಾಂಕ(Unit):—ಉದ್ದ ಭುಜದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಚೌರಸದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವನ್ನು ಆ ಇಡೀ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದಲ್ಲಿ **ಏಕಾಂಕ** ಎಂದು ಹಿಡಿಯುವರು.

ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಭುಜವನ್ನು ಅದರ ತಳರೇಖೆಯೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಅದರ ಎದುರಿನ ಕೋನಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ತಳರೇಖೆಯ ವರೆಗೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬವು **ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರ**ವಾಗುವದು.

ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಯಾವದೊಂದು ಭುಜವನ್ನು ತಳರೇಖೆ ಯೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಆ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖೆ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬಾಂತರಕ್ಕೆ ಆ **ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಎತ್ತರ**ವೆಂದು ಹೇಳುವರು.

ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿಯ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ **ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದ ನಡುವಿನ** ತ್ರಿಕೋನ ಅಥವಾ ಚೌಕೋನಗಳೆನ್ನುವರು.



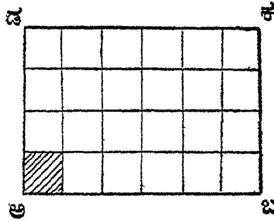
ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ **ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ** ಅನ್ನುವರು.

ಅಬಕ, ಡಈಫ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಸರಿಯಿದೆಯೆಂದು ಹೇಳುವಾಗ △ **ಅಬಕ** = △ **ಡಈಫ** ಎಂದು ಬರೆಯುವರು. ಇದರಂತೆ, = ಈ ಗುರುತನ್ನು ಬೇರೆ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಸರಿಯಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವಾಗ ಉಪಯೋಗಿಸುವರು.

ಏಕರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವವು; ಆದರೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಆಕೃತಿಗಳು ಮಾತ್ರ ಏಕರೂಪದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವವೆಂದು ಹೇಳಲಿಕ್ಕೆ ಬರುವದಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಮೇಯ ೨೭.

ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಬಕಡ** ಆಯತದಲ್ಲಿ ಅಬ ಭುಜ ೬ ಏಕಾಂಕ ಮತ್ತು **ಅಡ** ಭುಜ ೪ ಏಕಾಂಕ ಅಳತೆಯಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:—**ಅಬಕಡ** ಇವರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ (೬×೪) ಚೌರಸ ಏಕಾಂಕ ಆಗುವದು; ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಸಿದ್ಧತೆ:—**ಅಬ** ಭುಜದಲ್ಲಿ ೬ ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಆ ಭಾಗ ದರ್ಶಕ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ **ಅಡ** ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ **ಅಬಕಡ**ದಲ್ಲಿ ೬ ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗುವವು. **ಅಡ** ಭುಜದಲ್ಲಿ ೪ ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ, ಭಾಗದರ್ಶಕ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ **ಅಬ** ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ೬ ಆಯತಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಪುನಃ ೪ ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾದವದ್ದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಣ್ಣ ವಿಭಾಗವು ಚೌರಸವಾಗಿದ್ದು, ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ೧ ಏಕಾಂಕ ಆಗಿರುವದು.

∴ **ಅಬಕಡ** ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ (೬×೪) ಏಕಾಂಕ ಇದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, **ಅಬ** ಭುಜದಲ್ಲಿ **ಲ** ಏಕಾಂಕ ಉದ್ದಳತೆಯೆಂದೂ, **ಅಡ** ಭುಜದಲ್ಲಿ **ರ** ಏಕಾಂಕ ಅಗಲಳತೆಯೆಂದೂ ತಿಳಿದರೆ, **ಅಬಕಡ** ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು **ಲರ** ಏಕಾಂಕ ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ ಏಕಾಂಕಗಳನ್ನು

ಕಲ್ಪಿಸುವಾಗ **ಲ** ಮತ್ತು **ರ** ಇವುಗಳ ಏಕಾಂಕಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿಯೇ ಇರಬೇಕಾಗುವದು. [**ಅಬ** ಮತ್ತು **ಅಡ** ಭುಜಗಳು ಪರಿಚ್ಛೇದನಶೀಲ (Commensurable) ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಇದು ಶಕ್ಯವಿದೆ.]

ಉದಾಹರಣಾರ್ಥವಾಗಿ, **ಅಬಕಡ** ಆಯತದ **ಅಬ** ಭುಜ ೪$\frac{೨}{೩}$ ಇಂಚು, ಮತ್ತು **ಅಡ** ಭುಜ ೩$\frac{೪}{೫}$ ಇಂಚು ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಇಂಚಿನ $\frac{೧}{೧೫}$ ಭಾಗವನ್ನು ಏಕಾಂಕ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. (೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ಭಾ. ೧೫ ಆಗುವದು.) ಅಂದರೆ **ಅಬ** = ೭೦ ಏಕಾಂಕ ಮತ್ತು **ಅಡ** = ೫೭ ಏಕಾಂಕ ಆಗುವವು. ಮತ್ತು ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು = ೭೦×೫೭ ಏಕಾಂಕಗಳಾಗುವವು.

ಇದರಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಒಂದು ಭುಜದ ಮೇಲೆ $\frac{೧}{೧೫}$ ಇಂಚಿನ ಚೌರಸವು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಏಕಾಂಕ ಆಗುವದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ ಇದೆ.

∴ ೧ ಇಂಚಿನ ಬದಿಯ ಚೌರಸದಲ್ಲಿ ೧೫×೧೫ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಏಕಾಂಕಗಳಿರುವವು. ಅಂದರೆ ಈ ಏಕಾಂಕವು= $\frac{೧}{೧೫\times೧೫}$ ಚೌರಸ ಇಂಚು ಆಗುವದು.

∴ **ಅಬಕಡ** ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು

= ೭೦ × ೫೭ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಏಕಾಂಕಗಳು.

= $\frac{೭೦\times೫೭}{೧೫\times೧೫}$ ಚೌರಸ ಇಂಚುಗಳು.

= $\frac{೧೪}{೩}\times\frac{೧೯}{೫}$,, ,,

= ೪$\frac{೨}{೩}$ × ೩$\frac{೪}{೫}$,, ,,

"ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲ ಅಳತೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುವದು," ಎಂದು ಇದರಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಂಡೆವು. ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಉದ್ದ ಅಗಲಳತೆಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿರಲಿ, ಅಥವಾ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿರಲಿ, ಹೇಗಿದ್ದರೂ ಸತ್ಯವಿದೆ.

ಲೇಖನ ಪದ್ಧತಿ:—ಎಂಥ ತೊಂದರೆಯೂ ಇಲ್ಲದಾಗ ಆಯತದ ಕರ್ಣರೇಷೆಯ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಎರಡೇ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಆ ಆಯತದ ಹೆಸರನ್ನು ಹೇಳುವರು. ಅಂದರೆ **ಅಬಕಡ** ಆಯತವನ್ನು ಆಯತ **ಅಕ**, ಇಲ್ಲವೆ ಆಯತ **ಬಡ** ಎಂದು ಬರೆಯುವರು.

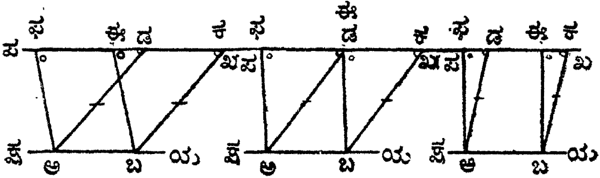
---

೧೫ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನ ಇವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

ಸಿದ್ಧಾಂತ ೨೮.

ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳು ಸಮ ಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— ಅಬ ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು **ಪಖ, ಕ್ಷಯ** ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ **ಅಬಕಡ, ಅಬಈಫ** ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳು.

ಸಾಧ್ಯ:—**ಅಬಕಡ, ಅಬಈಫ** ಇವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.

ಸಿದ್ಧತೆ:—**ಅಡಫ ಬಕಈ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle$ **ಅಡಫ** $=$ $\angle$ **ಬಕಈ** (**ಅಡ** $\parallel$ **ಬಕ**; ಅನುರೂಪಕೋನ)
$\angle$ **ಅಫಡ** $=$ $\angle$ **ಬಈಕ** (**ಅಫ** $\parallel$ **ಬಈ** ,, ,,)
ಅಡ $=$ **ಬಕ** (ಸಮಾ. ಚೌ. ದ ಎದುರು ಭುಜಗಳು)

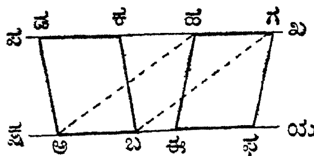
$\therefore$ **ಅಡಫ, ಬಕಈ** ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಆಗಿರುವವು. (೨ ಕೋನ; ಅಂತರ್ಗತಭುಜ).

$\therefore$ **ಅಡಫ, ಬಕಈ** ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಸಮಾನ ಆಗಿರುವವು.

ಅಬಕಫ ಪೂರ್ಣ ಆಕೃತಿಯಿಂದ ಇವೆರಡೂ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಹಿಂದೊಂದು ಕಳೆಯಿರಿ. ಅಂದರೆ ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ ಉಳಿದ **ಅಬಕಡ, ಅಬಈಫ** ಈ ಆಕೃತಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಸಮಾನ ಆಗುವವು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ :—ಮೇಲಿನ ಸಿದ್ಧತೆಯು ಎಲ್ಲ ಪ್ರಕಾರದ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೂ ಹೊಂದುವದು. ಭಾಗಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸಿದ್ಧತೆಗಳು ಹೀಗೆ ಬದಲು ಮಾಡಿದ ಹೊರತು ಎಲ್ಲ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಹೊಂದಲಾರವು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೧ :—ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಬ, ಈಫ** ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು **ಪಖ, ಕ್ಷಯ** ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ **ಅಬಕಡ, ಈಫಗಹ** ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳಿವೆ. (**ಅಬ, ಈಫ** ಭುಜಗಳು **ಕ್ಷಯ** ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುವವು).

ಸಾಧ್ಯ:—**ಅಬಕಡ, ಈಫಗಹ** ಇವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.

ರಚನೆ:—**ಅಹ, ಬಗ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಅಬ** = **ಈಫ** (ಪಕ್ಷ)

ಈಫ = **ಹಗ** (ಸಮಾ. ಭು. ಚೌ. ದ ಎದುರುಭುಜ)

∴ **ಅಬ** = **ಹಗ** ಮತ್ತು **ಅಬ, ಹಗ** ಇವು ಸಮಾಂತರ ಇವೆ.

∴ **ಅಬಗಹ** ಇದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇದೆ.

ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌ. **ಅಬಕಡ, ಅಬಗಹ** ಇವು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರಾಗಿವೆ; (**ಅಬ** ಇದು ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯು, || ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ.)

ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌ. **ಈಫಗಹ, ಅಬಗಹ** ಇವು ಸಮ ಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿವೆ. (**ಹಗ** ಇದು ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯು, || ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ).

∴ **ಅಬಕಡ, ಈಫಗಹ** ಇವು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:—ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಒಮ್ಮೊಮ್ಮೆ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹೇಳಬಹುದು:

"ಒಂದೇ ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿನ, ಮತ್ತು ಸಮಾನ ಎತ್ತರದ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವವು."

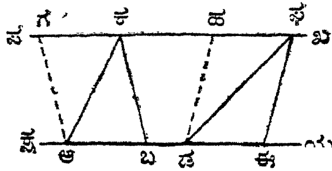
ಇಂಥ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಮಾಡುವ ಸಿದ್ಧತೆ:- (೧) ಈ ಪ್ರಕಾರದ ಸಮಾ. ಭು. ಚೌಕೋನಗಳು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು; ನಂತರ (೨) ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಗಳಂತೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡುವದು; ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ (೩) ಮೇಲಿನ ಉಪಸಿ. ೧ರಂತೆ ಅದು ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೂ ಸರಿ ಬೀಳುವದು ಎಂದು ತೋರಿಸುವದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೨:—ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು, ಆ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ತಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ ಸರಿಯಿರುವ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವದು.

ಅಂದರೆ, ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ
= ತಳರೇಖೆ × ಎತ್ತರ.

ಪ್ರಮೇಯ ೨೯.

ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದ ನಡುವೆ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಬ, ಡಈ** ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತು **ಪಖ, ಕ್ಷಯ** ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದ ನಡುವೆ **ಅಬಕ, ಡಈಫ** ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ (**ಅಬ, ಡಈ** ಭುಜಗಳು **ಕ್ಷಯ** ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ).

ಸಾಧ್ಯ:—**ಅಬಕ, ಡಈಫ** ಇವು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ತ್ರಿಕೋನಗಳು.

ರಚನೆ:—**ಅ** ದಿಂದ **ಬಕ**ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆದು **ಪಖ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಗ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು; **ಡ** ದಿಂದ **ಈಫ**ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆದು **ಪಖ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಹ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:—ರಚನೆಯಂತೆ **ಅಬಕಗ, ಡಈಫಹ** ಇವು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳಾದವು. **ಅಬ, ಡಈ** ಇವು ಅವುಗಳ ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ. ಮತ್ತು ಅವು **ಪಖ, ಕ್ಷಯ** ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವವು.

∴ **ಅಬಕಗ, ಡಈಫಹ** ಇವು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳಾಗುವವು. ಆದರೆ ಈ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳನ್ನು

ಅಶ್, ಡಫ ಕರ್ಣಗಳು ಎರಡೆರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ, △ ಅಬಕ = ½ ಸಮಾ. ಭು. ಚೌ. ಅಬಕಗ

ಮತ್ತು △ ಡಈಫ = ½ ಸಮಾ. ಭು. ಚೌ. ಡಈಫಹ

∴ △ ಅಬಕ = △ ಡಈಫ

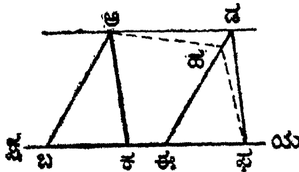
ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೧ :—ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರರೇಖಾಯುಗ್ಮದ ನಡುವಿನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವವು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೨ :—ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:— "ಒಂದೇ ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಸಮಾನ ಎತ್ತರದ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಇರುವವು." ಹೀಗೆ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಇದ್ದರೆ, ಇಂಥ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇಡಬಹುದೆಂಬುವನ್ನು ಮೊದಲು ತೋರಿಸಿ, ನಂತರ ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.

ಪ್ರಮೇಯ ೩೦ (ಪ್ರ. ೨೯ ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)

ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ ಇರುವ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರರೇಖಾಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.



ಪಕ್ಷ:—**ಕ್ಷಯ** ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ, **ಬಕ, ಈಫ** ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಗಳಿರುವ, **ಅಬಕ** ಮತ್ತು **ಡಈಫ** ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:—ಅಡ ರೇಖೆಯು **ಕ್ಷಯ** ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಿದೆ.

ಸಿದ್ಧತೆ:—ಅಡ ರೇಖೆಯು **ಕ್ಷಯ** ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಿರದಿದ್ದರೆ, **ಅ** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ **ಕ್ಷಯ** ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ **ಅಹ** ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ಈಡ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಹ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಹಫ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಈಗ **ಬಕ, ಈಫ** ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಮತ್ತು **ಕ್ಷಯ, ಅಹ** ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದ ನಡುವೆ ಇರುವ **ಅಬಕ, ಹಈಫ** ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರಗಳಾಗುವವು.

ಪರಂತು, **ಅಬಕ, ಡಈಫ** ಇವು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ತ್ರಿಕೋನಗಳು (ಪಕ್ಷ);

∴ **ಡಈಫ, ಹಈಫ** ಇವು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ತ್ರಿಕೋನಗಳು.

ಆದರೆ ಯಾವದೊಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಭಾಗವು, ಆ ಪೂರ್ಣ ವಸ್ತುವಿಗೆ ಸರಿ ಇರಲಾರದು; ಆದ್ದರಿಂದ **ಡಈಫ, ಹಈಫ** ಇವು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಲಾರವು ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

∴ **ಅಡ** ರೇಖೆಯು **ಕ್ಷಯ** ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುವದು ತಪ್ಪಾಗಿದೆ.

∴ **ಅಡ** ರೇಖೆಯು **ಕ್ಷಯ** ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರ ಇರುವದೇ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

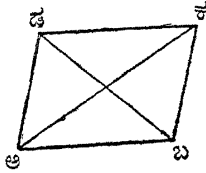
ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೧ :—ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ ಇರುವ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ ಇರುವವು.

ಸಿದ್ಧಾಂತ ೩೦ ರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

"ಒಂದೇ ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಒಂದೇ ಎತ್ತರದವು ಇರುವವು."

ಹೀಗೆ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ತಳರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಿಕ್ಕೆ ಬರುವವು ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ತೋರಿಸಿ, ನಂತರ ಸಿದ್ಧತೆಗೆ ಆರಂಭಿಸಬೇಕು.

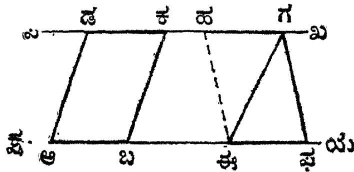
ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೨ :—ಚೌಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕರ್ಣರೇಖೆಯು ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆ ಚೌಕೋನವು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ ಆಗುವದು. (ಪ್ರ. ೨೦ ಉಪಸಿ. ೧ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)



ಸಿದ್ಧತೆ:— △ ಅಬಕ = ½ ಚೌಕೋನ ಅಬಕಡ = △ ಅಬಡ
∴ ಡಕ ‖ ಅಬ (ಉಪಸಿ. ೧.)
ಅದರಂತೆ, △ ಅಡಬ = ½ ಚೌಕೋನ ಅಬಕಡ = △ ಅಡಕ
∴ ಬಕ ‖ ಅಡ (ಉಪಸಿ. ೧)
∴ ಅಬಕಡ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ ೩೧.

ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರಭುಜಚೌಕೋನವು ಮತ್ತು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವು ಇದ್ದರೆ, ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವು, ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಇಮ್ಮಡಿ ಇರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ಅಬಕಡ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವು, ಮತ್ತು ಈಫಗ

ತ್ರಿಕೋನವು **ಅಬ, ಈಫ** ಎಂಬ ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತು **ಷಖ, ಕ್ಷಯ** ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ ಇರುವವು. (**ಅಬ, ಈಫ** ರೇಖೆಗಳು **ಕ್ಷಯ** ದಲ್ಲಿರುವವು.)

ಸಾಧ್ಯ:—ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ **ಅಬಕಡ** ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= ೨ \triangle$ **ಗಈಫ** ದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ.

ರಚನೆ:— **ಈ** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ **ಫಗ** ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅದು **ಷಖ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಹ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಈಫ** $\parallel$ **ಹಗ** (ಪಕ್ಷ) ಮತ್ತು **ಈಹ** $\parallel$ **ಫಗ** (ರಚನೆ).

$\therefore$ **ಈಫಗಹ** ಇದೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವು.

ಮತ್ತು **ಈಫಗಹ** ದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= ೨ \triangle$ **ಗಈಫ** ದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ.

(**ಈಗ** ಕರ್ಣರೇಖೆಯು **ಈಫಗಹ** ವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದು).

ಅಬಕಡ, ಈಫಗಹ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳು. **ಅಬ, ಈಫ** ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆಯೂ, ಮತ್ತು **ಷಖ, ಕ್ಷಯ** ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವವು.

$\therefore$ **ಅಬಕಡ** ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $=$ **ಈಫಗಹ** ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ.

$\therefore$ **ಅಬಕಡ** ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= ೨ \triangle$ **ಗಈಫ** ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೧ :—ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವೂ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವೂ ಇದ್ದರೆ, ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ತ್ರಿಕೋನದ ಇಮ್ಮಡಿ ಇರುವದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೨ :—ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವು ಮತ್ತು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಸಮಾನ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಇಮ್ಮಡಿ ಇರುವದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೩:– ಆಯತದ ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜಗಳಿಗೆ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ

ತಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಇವು ಸರಿಯಿದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುವದು.

ಅಂದರೆ, **ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ** $= \frac{೧}{೨}$ (ತಳರೇಖೆ) $\times$ (ಎತ್ತರ).

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೧೪.

೧. ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಎದುರುಬದುರಿನ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯಿಂದ ಆ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳು ಉಂಟಾಗುವವು.

೨. ಒಂದು ಆಯತವು ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವು ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಎತ್ತರ ಸರಿಯಿದೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಪರಿಮಿತಿಯ ತುಲನೆ ಮಾಡಿರಿ.

೩. ಅಬಕಡ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ಅಬ ಭುಜದ ಮೇಲೆ ಮ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ. ಡಮ ಕೂಡಿಸಿದೆ. ಆದರೆ $\triangle$ ಅಡಮ $= \frac{೧}{೪}$ ಅಬಕಡ ಎಂಬದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೪. ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿಯ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವವೆಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ. ಮತ್ತು ಇದರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೇಳಿ, ಅದನ್ನೂ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೫. ಅಬಕಡ ಮತ್ತು ಅಬಮನ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳು ಅಬ ತಳರೇಖೆಯ ವಿರುದ್ಧ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿವೆ. ಆದರೆ ಅಬ ರೇಖೆಯು ಕಮ, ಡನ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದೆಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೬. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಬಕ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\triangle$ ಅಬಕ ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೭. ಅಬಕಡ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಮ ಬಿಂದು ವಿದೆ. ಆದರೆ $\triangle$ ಮಅಬ $+$ $\triangle$ ಮಕಡ $= \frac{೧}{೨}$ ಅಬಕಡ ಎಂಬು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೮. ಅಬಕಡ ಚೌಕೋನದ ಅಕ ಕರ್ಣರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮ ಇದೊಂದು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿದೆ. ಆದರೆ ಅಬಮಡ ಚೌಕೋನ $=$ ಕಬಮಡ ಚೌಕೋನ $= \frac{೧}{೨}$ ಅಬಕಡ ಚೌಕೋನ, ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೯. ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಬ ಮತ್ತು ಡ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಅಕ ಕರ್ಣರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಅ ಮತ್ತು ಕ ಬಿಂದು

ಗಳಿಂದ ಬಡ ಕರ್ಣರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಆ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಮಾಂತರಭುಜಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಅಬಕಡ ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದೊಡನೆ ತುಲನೆ ಮಾಡಿರಿ.

೧೦. ಅಬಕಡ ಚೌಕೋನ ಇದೆ. ಅ ಕ ರೇಖೆಯು ಬಡ ರೇಖೆಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ. △ ಬಅಕ ಮತ್ತು △ ಡಅಕ ಇವು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವೆಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ. ಇದರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಬರೆದು, ಅದನ್ನೂ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೧೧. △ ಅಬಕದ ಬಕ ತಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮ ಇದೊಂದು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಅಮ ದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, △ ಅಪಬ = △ ಅಪಕ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೧೨. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿ ಪ ಇದೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. △ ಅಪಬ = △ ಅಪಕ ಇದ್ದರೆ, ಅಪ ರೇಖೆಯು (ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ ಬೆಳಿಸಿ) ಬಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದು; ಅಥವಾ ಬಕ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವದು ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೧೩. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ ಸರಿ ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಪೂರಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವೆರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವವು.

೧೪. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಬ, ಅಕ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಡ ಮತ್ತು ಈ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಆದರೆ (೧) ಡಬಕ ಮತ್ತು ಈಬಕ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಡಈ || ಬಕ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ. (ಪ್ರಮೇಯ ೨೪ಕ್ಕೆ ತುಲನೆ ಮಾಡಿರಿ.) (೨) △ ಅಡಈ = $\frac{೧}{೪}$ △ ಅಬಕ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೧೫. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಬ, ಅಕ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಡ ಮತ್ತು ಈ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಡಕ, ಈಬ ರೇಖೆಗಳು ಗ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ △ ಗಅಬ ಮತ್ತು △ ಗಅಕ ಇವು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ (ಉದಾ. ೧೨ರ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ) ಅಗ ರೇಖೆಯನ್ನು ಬೆಳಿಸಿದರೆ, ಅದು ಬಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಳ ಮೀಲನಬಿಂದುವಿಗೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಸಂಪಾತ (Centroid) ಎನ್ನುವರು.]

೧೬. ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನವಿದೆ. (ಅಬ‖ಡಕ). ಅಬ, ಡಕಗಳಲ್ಲಿ ಮ ಮತ್ತು ನ ಇವು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. ಮನ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ವ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಇದೆ. ಆದರೆ,

(೧) ಅಡನಮ ಮತ್ತು ಬಕನಮ ಇವು ಸಮಾನ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನಗಳು;

(೨) ಅಬ ಮತ್ತು ಕಡ ಭುಜಗಳನ್ನು ಬೆಳಿಸದೆ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಕೂಡುವಂತೆ ವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ಅಬಕಡ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದು.

***೧೭.** ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಅಷ್ಟಷ್ಟೇ ಎತ್ತರದ ಹಲವು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಮಿತಿಯು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವದು.

೧೮. ಅಬಕಡ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಬಕ, ಕಡಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಈ, ಫ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಆದರೆ, ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

(೧) △ ಕಈಫ = $\frac{೧}{೮}$ ಅಬಕಡ

ಮತ್ತು (೨) △ ಅಈಫ = $\frac{೩}{೮}$ ಅಬಕಡ (ಮುಂ. ವಿ.)

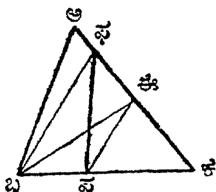
೧೯. ಚೌಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮದಿಂದ ಕೂಡಿಸುವ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವು ಮೂಲ ಚೌಕೋನದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುವದು.

೨೦. △ ಅಬಕ ಇದರ ಅಬ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಇದೆ. ಬಕ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಮತ್ತು ಸಮಾನವಾಗಿ ಪರ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಪರ ರೇಖೆಯು ಅಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಫ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ △ ಅಫರ ಮತ್ತು △ ಬಪಫ ಇವು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಮುಂ. ವಿ.)

೨೧. ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ತಪ್ಪು ಇದ್ದರೆ ತಿದ್ದಿರಿ:—

"ಎರಡು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯು, ಆ ತಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವದು."

೨೨. ಅಬಕ ಇದರ ಬಕ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬಈ ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಪಈ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಬಫ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಅಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಫ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಪಫ ಕೂಡಿಸಿರಿ. $\triangle$ ಪಫಕ $= \frac{೧}{೨}$ $\triangle$ ಅಬಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. [ಉದಾ. ಸಂಗ್ರಹ ೧೬ರಲ್ಲಿ ೪ನೆಯ ಉದಾ. ಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]

೨೩. $\triangle$ ಅಬಕ ಇದರ ಬಕ ತಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಯು ಅಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ಡ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ, ಅಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವದು. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಬಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಯು ಬಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಮ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ, ಮತ್ತು ಡ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಕಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಯು ಬಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ $\triangle$ ಅಡನ $=$ $\triangle$ ಅಈಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಬನ $=$ ಮಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

೨೪. ಅಬಕಡ ಚೌಕೋನದ ಅಬ, ಬಕ, ಕಡ, ಡಅ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಪ, ಫ, ರ, ಸ ಇವು ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಪಸ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿದೆ.

$\triangle$ ಬಪಫ $+$ $\triangle$ ಡಸರ $=$ $\triangle$ ಮಫರ. ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬದಿಯು $\frac{೧}{೪}$ ಅಬಕಡದಷ್ಟು ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

೨೫. ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದ ಅಸಮಾಂತರ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯು, ಅದರ ಸಮಾಂತರ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[ಅಬ, ಕಡ ಈ ಅಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಷ, ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅಂದರೆ $\triangle$ ಕ್ಷಬಕ$=\frac{೧}{೨}$ $\triangle$ ಅಬಕ$=\frac{೧}{೨}$ $\triangle$ ಡಬಕ $=$ $\triangle$ ಯಬಕ

$\therefore$ ಕ್ಷಯ $\parallel$ ಬಕ.]

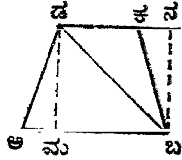
೧೬ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ಕೆಲವು ಸರಳರೇಖಾಕೃತಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

೧. ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು, ಸಮಾಂತರ ಭುಜಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಲಂಬದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಆಗುವದು.

ಅಬಕಡ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ **ಅಬ || ಡಕ;**

ಬಡ ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಅಬದ ಮೇಲೆ **ಡಮು** ಮತ್ತು **ಡಕ**ದ ಮೇಲೆ **ಬನ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಂದರೆ,



ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ **ಅಬಕಡ** $=\triangle$ **ಅಬಡ** $+\triangle$ **ಬಡಕ**

$=\frac{1}{2}$ **ಅಬ · ಡಮು** $+\frac{1}{2}$ **ಡಕ . ಬನ**

$=\frac{1}{2}$ **ಅಬ · ಡಮು** $+\frac{1}{2}$ **ಡಕ . ಡಮು**

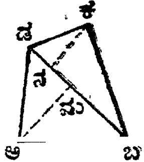
($\therefore$ **ಡಮು** $=$ **ಬನ**)

$=\frac{1}{2}$ (**ಅಬ** $+$ **ಡಕ**) **ಡಮು.**

೨. ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು, ಅದರ ಕರ್ಣದ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಅದರ ಎದುರಿನ ಕೋನಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಆಗುವದು.

ಅಬಕಡ ಚೌಕೋನ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಬಡ ಕೂಡಿಸಿರಿ; **ಬಡ** ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ **ಅಮು, ಕನ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಂದರೆ,

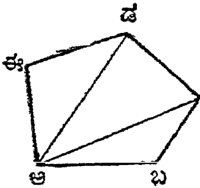


ಚೌಕೋನ **ಅಬಕಡ** $=\triangle$ **ಅಬಡ** $+\triangle$ **ಕಡಬ**

$=\frac{1}{2}$ **ಬಡ** $\times$ **ಅಮು** $+\frac{1}{2}$ **ಬಡ** $\times$ **ಕನ**

$=\frac{1}{2}$ **ಬಡ** (**ಅಮು** $+$ **ಕನ**)

೩. ಬಹುಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ.



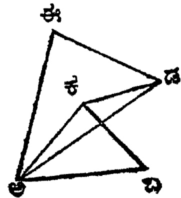
(೧) ತ್ರಿಕೋನ ಕಾರ್ಯದ ರೀತಿ:—

ಅಬಕಡಈ ಇದೊಂದು ಬಹುಕೋನಾಕೃತಿ ಇದೆ. ಇದರ ಕೋನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ದೊಂದು ಅ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಉಳಿದ ಬಿಂದು ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ,

ಬಹುಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನ ವಿಭಾಗಗಳುಂಟಾಗುವವು.

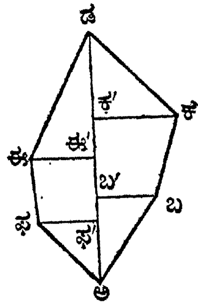
ಆಕೃತಿಯು ಬಹಿರ್ವಕ್ರ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಬಹುಕೋನಾಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವು, **ಅಬಕ**, **ಅಕಡ** ಮತ್ತು **ಅಡಈ** ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಆಗುವದು.



ಬಹುಕೋನವು ಬಹಿರ್ವಕ್ರ ಇರದಿದ್ದರೆ ಈ ನಿಯಮದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗು ವದು. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ,

ಅಬಕಡಈ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $=\triangle$ **ಅಬಕ**
$-\triangle$ **ಅಕಡ** $+\triangle$ **ಅಡಈ**

(೨) 'ಕ್ಷೇತ್ರ ಪುಸ್ತಕ'ದ ರೀತಿಯು:-



ಅಬಕಡಈಫ ಇದೊಂದು ಬಹುಕೋನಾ ಕೃತಿಯಿದೆ. **ಅಡ** ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಭೂಮಿ **ರೇಖೆ** (Base line) ಎಂದು ಕಲ್ಪಿ ಸಿರಿ.

ಅಡ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ **ಬಬ'**, **ಕಕ'**, **ಈಈ'**, **ಫಫ'** ಲಂಬಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಈ ಲಂಬಗಳ ಅಳತೆ ಮಾಡಿರಿ; ಅದರಂತೆ **ಅಬ'**, **ಬ'ಕ'**, **ಅಡ**, **ಅಈ'**, **ಅಫ'** ಅಳೆ ಯಿರಿ.

ಬಹುಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು, **ಅಬಬ′ ಡಕಕ′**, **ಡಈಈ′**, **ಅಫಫ′** ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮತ್ತು **ಬಬ′ಕ′ಕ**, **ಈಈ′ಫ′ಫ** ಈ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಆಗುವದು.

ನೀವು ಮಾಡಿದ ಅಳತೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಅಡ = ೮೦೦; **ಅಬ′** = ೨೭೦; **ಅಕ′** = ೫೨೦;
ಅಈ′ = ೩೯೦; **ಅಫ′** = ೨೦೦; **ಬಬ′** = ೨೦೦;
ಕಕ′ = ೨೭೫; **ಈಈ′** = ೨೧೬; **ಫಫ′** = ೨೦೦;

ಈ ಅಳತೆಯ ಕೊಂಡಿಯು (Links) ಸರಪಳಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡದ್ದು ಇದೆ.

೧೦೦ ಕೊಂಡಿಗಳು = ೧ ಸರಪಳಿ; ೧೦ ಚೌರಸ ಸರಪಳಿ = ೧ ಎಕರೆ.

ಈ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕ್ಷೇತ್ರಮಾಪಕರು (Surveyor) ತಮ್ಮ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆದಿಡುತ್ತಾರೆ:—

	ಕೊಂಡಿಗಳು	
	ಡ ವರೆಗೆ	
	೮೦೦	
	೫೨೦	೨೭೫ **ಕ** ವರೆಗೆ
ಈ ವರೆಗೆ ೨೧೬	೩೯೦	
	೨೭೦	೨೦೦ **ಬ** ವರೆಗೆ
ಫ ವರೆಗೆ ೨೦೦	೨೦೦	
	ಅ ದಿಂದ	

ಕ್ಷೇತ್ರ ಮಾಪಕನು ಭೂಮಿಯನ್ನು ಅಳೆಯುವಾಗ **ಅ** ಕೋನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆರಂಭಮಾಡಿ **ಡ** ಕೋನ ಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗೆ ಅಳತೆಯನ್ನು ಮುಗಿಸುವನು. ಆಗ ಆಯಾ ಕೋನ ಬಿಂದುಗಳ ಲಂಬಾಂತರಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ಅವನ್ನು ತನ್ನ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದ ಮಧ್ಯಸ್ತಂಭದ ಬಲಕ್ಕೆ ಅಥವಾ ಎಡಕ್ಕೆ (ಅವು ಇರುವ ದಿಕ್ಕಿಗೆ) ಬರೆದಿಡುವನು.

ಅಂದರೆ, △ ಅಬಬ′ = ೧/೨ ಅಬ′. ಬಬ′ = ೧/೨×೨೭೦×೨೦೦=೨೭೦೦೦

△ ಡಕಕ′ = ೧/೨ ಡಕ′. ಕಕ′ = ೧/೨×೨೮೦×೨೭೫=೩೮೫೦೦

△ ಅಫಫ′ = ೧/೨ ಅಫ′. ಫಫ′ = ೧/೨×೨೦೦×೨೦೦=೨೦೦೦೦

△ ಡಈಈ′ = ೧/೨ ಡಈ′. ಈಈ′=೧/೨×೪೧೦×೨೧೬=೪೪೨೮೦

ಸ.ಲ.ಚೌ. ಬಬ′ಕ′ಕ=೧/೨ ಬ′ಕ′ (ಬಬ′+ಕಕ′)=೧/೨×೨೫೦×೪೭೫=೫೯೩೭೫

ಸ.ಲ.ಚೌ. ಈಈ′ಫಫ′=೧/೨ ಈಫ′ (ಈಈ′+ಫಫ)=೧/೨×೧೯೦×೫೧೬=೩೯೫೨೦

∴ ಚೌ. ಕೊಂಡಿಗಳು =೨೨೮೬೭೫

∴ **ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವು** = ೨೨.೮೬೭೫ ಚೌ. ಸರಪಳಿಗಳು.

= ೨.೨೮೬೭೫ **ಎಕರೆಗಳು.**

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೧೫.

ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ:—

೧. ಚೌರಸ: ಭುಜ ೨ ಇಂಚು.

೨. ಆಯತ: ೩ ಇಂಚು × ೫ ಇಂಚು.

೩. ತ್ರಿಕೋನ: ∠ ಅ = ಕಾಟಕೋನ, ಅಬ = ೨ ಇ., ಅಕ = ೩ ಇ.

೪. ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ: ತಳರೇಖೆ ೪ ಇ , ಎತ್ತರ ೨ ಇ.

೫. ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ: ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜಗಳು ೩ ಇ. ಮತ್ತು ೫ ಇ.; ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಕೋನ ೪೫°.

೬. ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನ: ಕರ್ಣಗಳು ೩ ಇ., ೨೧/೨ ಇ.

೭. ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ: ಸಮಾಂತರ ಭುಜಗಳು ೨ ಇ., ೩ ಇ.; ಲಂಬಾಂತರ ೧.೫ ಇ.

೮. ಚೌಕೋನ ಅಬಕಡ: ಅಕ=೩ ಇ.; ಅಕ ದ ಮೇಲೆ ಬ ಮತ್ತು ಡ ಗಳಿಂದ ಲಂಬಾಂತರಗಳು ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ ೨ ಇ., ೧ ಇ.

೯. ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಕಾಟಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿ ಉಂಟಾಗುವ ಚೌಕೋನ: ಕರ್ಣಗಳು ೨.೫ ಇ., ೪ ಇ.

೧೦. ಅಬಕಡ ಚೌಕೋನ: ಅಕ=೩ ಇ., ಬಡ=೪ ಇ.; ಅಕ ಮತ್ತು ಬಡ ನಡುವಿನ ಕೋನ ೪೫°.

೧೧. ಸುಸಮ (regular) ಷಟ್‌ಕೋನ: ಭುಜ ೨ ಇಂಚು.

೧೨. ಒಬ್ಬ ಕ್ಷೇತ್ರಮಾಪಕನು ತನ್ನ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಅಳತೆಯನ್ನು ಬರೆದಿಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ:

	ಕೊಂಡಿಗಳು	
	ಬ ವರೆಗೆ	
	೪೮೦	
	೩೦೦	೩೦ **ಈ** ವರೆಗೆ
ಡ ವರೆಗೆ ೬೦	೨೩೦	
	೧೫೦	೪೫ **ಕ** ವರೆಗೆ
	ಅ ದಿಂದ	

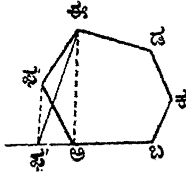
ಅನುಕೂಲವಾದ ಪ್ರಮಾಣದಿಂದ (Scale) ಒಂದು ನಕ್ಷೆ ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಅ ಹೊಲದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೭ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಕೃತಿಗಳು

ಕೃತ್ಯ ೧೨.

ಒಂದು ಸರಳರೇಖಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಅದರ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರದಷ್ಟು ಪರಂತು ಅದರಲ್ಲಿದ್ದ ಭುಜಗಳಿಂದ ಒಂದು ಕಡಿಮೆ ಭುಜಗಳಷ್ಟು ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖಾಕೃತಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಬಕಡಈಫ** ಎಂಬ ೬ ಭುಜಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸರಳರೇಖಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:—ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಗೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗುವಂಥ, ಮತ್ತು ೫ ಭುಜಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖಾಕೃತಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ:—**ಅಈ** ಕೂಡಿಸಿರಿ; **ಈಅ**ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ **ಫಫ'** ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅದು ಬೆಳಿಸಿದ **ಬಅ** ಇದನ್ನು **ಫ'** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಈಫ'** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ **ಬಕಡಈಫ'** ಇದು ಇಷ್ಟ ಆಕೃತಿ ಆಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:—**ಅಈಫ, ಅಈಫ'** ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಣಗಳು, **ಅಈ** ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತು **ಅಈ, ಫ'ಫ** ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ ಇರುವವು.

$\therefore \triangle$ **ಅಈಫ** $= \triangle$ **ಅಈಫ'**.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ **ಅಬಕಡಈ** ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ;

ಅಬಕಡಈಫ ದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = **ಬಕಡಈಫ**′ ದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ.

ಉಪಕೃತ್ಯ ೧:—ಕೊಟ್ಟ ಚೌಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾದ ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆಯುವದು.

ಉಪಕೃತ್ಯ ೨:—ಕೊಟ್ಟ ಸರಳ ರೇಖಾಕೃತಿಗೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾದ ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆಯುವದು.

ಕೃತ್ಯ ೧೩.

ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾದ ಒಂದು ಕೋನವುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ಪಕ್ಷ:— **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ ಮತ್ತು **ಕ್ಷ** ಒಂದು ಕೋನವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— $\angle$ **ಕ್ಷ** ಇದಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾದ ಕೋನವುಳ್ಳ, ಮತ್ತು $\triangle$ **ಅಬಕ** ಇದರ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ:—**ಬಕ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಡ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ; **ಅ** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ **ಬಕ**ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ **ಅಯು** ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; **ಡ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\angle$ **ಕ್ಷ**ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ **ಕಡಈ** ಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಡಈ** ರೇಖೆಯು **ಅಯು** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಈ**

ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಕ** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ **ಡಈ** ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ **ಕಫ** ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ಅಯ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಫ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಅಂದರೆ **ಕಡಈಫ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ ಆಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:—ಅಡ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಬಡ = **ಡಕ** (ರಚನೆ)

∴ △ **ಅಬಡ** = △ **ಅಡಕ** (ಸಮಾನ ತಳರೇಖೆ, ಒಂದೇ || ಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ)

∴ △ **ಅಬಕ** = ೨ △ **ಅಡಕ.**

ಅದರಂತೆ, **ಕಡಈಫ** ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ (ರಚನೆ)

ಕಡಈಫ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌ. = ೨ △ **ಅಡಕ.**

(**ಡಕ** ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆ; **ಬಕ, ಅಯ**ಗಳ ನಡುವೆ)

∴ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ **ಕಡಈಫ** = △ **ಅಬಕ.**

ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ **ಡ** ಕೋನವು ಕೊಟ್ಟ ∠ **ಕ್ಷ**ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದೆ (ರಚನೆ)

∴ **ಕಡಈಫ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇದೆ.

ಉಪಕೃತ್ಯ ೧:—ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾದ ಆಯತ ತೆಗೆಯುವದು.

ಉಪಕೃತ್ಯ ೨:—ಕೊಟ್ಟ ಸರಳ ರೇಖಾಕೃತಿಗೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾದ ಆಯತ ತೆಗೆಯುವದು.

೧೨ನೆಯ ಕೃತ್ಯದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಪುನಃ ಪುನಃ ಮಾಡಿ ಮೊದಲು ಸರಳ ರೇಖಾಕೃತಿಗೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು; ನಂತರ ೧೩ನೆಯ ಕೃತ್ಯದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾದ ಆಯತವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು.

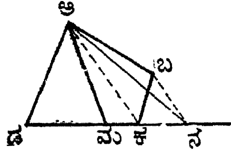
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೧೬.

೧. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಅ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು, ಆ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ೨, ೩, ೫ ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೨. ಕೊಟ್ಟ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನವನ್ನು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾದ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ರೂಪಾಂತರಿಸಿರಿ.

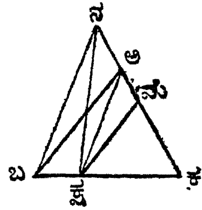
೩. ಅಬಕಡ ಚೌಕೋನದ ಅ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಆ ಚೌಕೋನವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ.

[ಅಕ ಕರ್ಣ ತೆಗೆಯಿರಿ. △ಅಬಕ ಇದು △ಅಕಡಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದಾಗಿದ್ದರೆ, ಬನ ∥ ಅಕ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಬೆಳಿಸಿದ ಡಕ ಇದನ್ನು ನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಡನ ರೇಖೆಯನ್ನು ಮ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ. ಅಮ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಮ ಇದು ಇಷ್ಟ ರೇಖೆ ಆಗುವದು.]



೪. △ಅಬಕ ಇದರ ಬಕ ತಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿಯ ಕೊಟ್ಟ ಕ್ಷ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

[ಅಕ್ಷ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಬಕ್ಷ < ಕ್ಷಕ ಇದ್ದರೆ ಬನ ∥ ಅಕ್ಷ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಬೆಳಿಸಿದ ಕಅ ರೇಖೆಯನ್ನು ನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಕನ ರೇಖೆಯನ್ನು ಮ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ. ಕ್ಷಮ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ ಕ್ಷಮ ಇದು ಇಷ ರೇಖೆ ಆಗುವದು.



ಯಾಕಂದರೆ,

△ಕ್ಷನಅ = △ಕ್ಷಬಅ

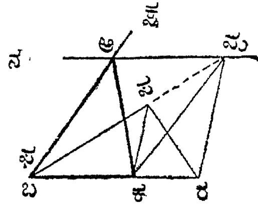
∴ △ಕ್ಷನಕ = △ಅಬಕ

∴ △ಕ್ಷಮಕ = $\frac{೧}{೨}$ △ಕ್ಷನಕ = $\frac{೧}{೨}$ △ಅಬಕ.]

೫. ಬಕ ಭುಜವನ್ನೂ ಬ ಕೋನವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲೆ △ಪಫರ ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗುವಂತೆ △ಅಬಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

[ಫರದಲ್ಲಿ ಬಕದಷ್ಟು ಫಕ ತುಂಡರಿಸಿರಿ. ಪಕ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಕಪಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ರಮ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಬೆಳಿಸಿದ ಬಪ ರೇಖೆಯನ್ನು ಮ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಮನ ∥ ಫರ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಫ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ∠ಬದಷ್ಟು

∠ ಕಫಕ್ಷ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಬಕ್ಷ ಇದು ಮನ ಇದನ್ನು ಅ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಅಕ ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಮತ್ತು ಫ ಬಿಂದುವನ್ನು ಬ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ ಅಬಕ ಇದು ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು. △ ಪಫರ = △ ಮಕಫ = △ ಅಫಕ ಅಥವಾ △ ಅಬಕ ಹೀಗೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.]



*೬. ಕೊಟ್ಟ ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಕ ತಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಕ್ಷ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ½ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದಷ್ಟು ತ್ರಿಕೋನ ಮಾಡಿರಿ.

*೭. ಕೊಟ್ಟ ಆಯತಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗುವಂತೆ, ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜವು ಕೊಟ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಗೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಆಯತವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಭೂಮಿತಿಗನುಸರಿಸಿ $\frac{೫ \times ೪}{೬}$, $\frac{೧೧^೨}{೯}$, $\frac{೬೩}{೫}$ ಈ ಉದ್ದಳತೆಯ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

*೮. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ೪೫ ಚೌ. ಸೆ. ಮಿ. ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜ ೭ ಸೆ. ಮಿ. ಇರುವ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

*೯. ಅಬಕಡ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಾ. ಭು. ಚೌ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

(೧) ಅದರ ಒಂದು ಭುಜವು ಕೊಟ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಯಷ್ಟು, ಅದರ ಕೋನಗಳು ಅ, ಬ, ಕ, ಡ ಕೋನಗಳಷ್ಟು, ಇರಬೇಕು;

(೨) ಅದರ ಒಂದು ಭುಜವು ಕೊಟ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಯಷ್ಟು, ಅದರ ಒಂದು ಕೋನವು ಕೊಟ್ಟ ಕೋನದಷ್ಟು ಇರಬೇಕು;

(೩) ಅದರ ಕರ್ಣಗಳು ಕೊಟ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಗಳಷ್ಟು ಇರಬೇಕು;

(೪) ಅದರ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಕೊಟ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಗಳಷ್ಟು ಇರಬೇಕು;

(೫) ಅದರ ಒಂದು ಭುಜ, ಒಂದು ಕರ್ಣ ಕೊಟ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಿರಬೇಕು.

*೧೦. ಒಂದು ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಕೋನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು, ಚೌಕೋನದ ೫ ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

*೧೧. ಒಂದು ಪಂಚಕೋನದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಕೋನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಅದರಲ್ಲಿ ೫ ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

*೧೨. ಕೊಟ್ಟ ಕ್ಷಯುರ್ಝು ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಯ ಕರ್ಣ (ಅಕ) ಇರುವ ಒಂದು ಅಬಕಡ ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

---

೧೮ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ಆಯತಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು

ಆಯತದ ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜಗಳು ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ **ಅಬ** ಮತ್ತು **ಕಡ** ಗಳಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ **ಅಬ** ಮತ್ತು **ಕಡ** ಗಳಿಂದ ಒಳಗೊಂಡ ಆಯತವೆಂದೆನ್ನುವರು. ಮತ್ತು ಅದನ್ನು '**ಅಬ, ಕಡ** ಆಯತ' ಅಥವಾ '**ಅಬ.ಕಡ**' ಹೀಗೆ ಬರೆದು ತೋರಿಸುವರು. **ಅಬ.ಕಡ** ಇದು ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಿದೆ.

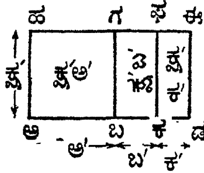
ಅಬ ದಷ್ಟು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಚೌರಸಕ್ಕೆ **ಅಬ** ಮೇಲಿನ ಚೌರಸ ಅಥವಾ **ಅಬ**² ಹೀಗೆ ತೋರಿಸುವರು. **ಅಬ** ರೇಷೆಯ ಅ ಮತ್ತು **ಬ** ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ **ಕ್ಷ** ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, '**ಕ್ಷ** ದಿಂದ **ಅಬ** ದ ಅಂತರ್ಭೇದ' ಆಗುವದು; ಇಲ್ಲವೆ '**ಕ್ಷ** ದಲ್ಲಿ **ಅಬ** ದ ಅಂತರ್ಭೇದವಿದೆ.' ಅನ್ನುವರು. ಅಂತರಭೇದ ಇದರ ಬದಲು **ಅಂತರ್ವಿಭಾಗ** ಎಂದೂ ಹೇಳುವದುಂಟು.

ಅಬ ಅಥವಾ **ಬಅ** ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ **ಕ್ಷ** ಬಿಂದು ಇದ್ದರೆ ಆದಕ್ಕೆ **ಕ್ಷ** ದಿಂದ **ಅಬ** ದ **ಬಹಿರ್ಭೇದ** ಅಥವಾ **ಬಹಿರ್ವಿಭಾಗ** ಆಗುವದೆಂದು ಹೇಳುವರು.

ಅಂತರ್ಭೇದವಿರಲಿ ಬಹಿರ್ಭೇದವಿರಲಿ ಯಾವುದಿದ್ದರೂ **ಕ್ಷ** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ **ಅಬ** ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ **ಅಕ್ಷ** ಮತ್ತು **ಕ್ಷಬ** ಹೀಗೆ ಎರಡು ಖಂಡ (Segments) ಗಳಾಗುವವು.

ಬೀಜಗಣಿತದ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣವನ್ನು ಭೂಮಿತಿ ಯಿಂದ ಬಿಡಿಸುವಾಗ ರೇಖೆಗಳ ವಿಶಿಷ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಗಳನ್ನು **ಕ್ಷ**', **ಅ**,' **ಬ**', **ಕ**', ಇಂಥ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಿ, ಆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸು ವರೆಂಬದನ್ನು ವಿಚಾರಿಸೋಣ:—

(೧) ಕ್ಷ'(ಅ'+ಬ'+ಕ') = ಕ್ಷ'ಅ' + ಕ್ಷ'ಬ' + ಕ್ಷ'ಕ' ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀ-ಕರಣದ ಭೂಮಿತಿಯಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ:



ಅಬಕಡ ರೇಖೆಯನ್ನು, **ಅಬ** = ಅ', ಬಕ = ಬ', **ಕಡ** = ಕ' ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಅಂದರೆ **ಅಡ** = ಅ' + ಬ' + ಕ'. ಆಗುವದು.

ಅಹ = ಕ್ಷ' ಆಗುವಂತೆ **ಅಡಈಹ** ಆಯತ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಹ** ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ **ಬಗ, ಕಫ** ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವು **ಹಈ** ರೇಖೆಯನ್ನು ಅನು ಕ್ರಮವಾಗಿ **ಗ, ಫ** ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು.

ಅಂದರೆ, **ಹಬ, ಗಕ, ಫಡ,** ಇವು ಆಯತಗಳು; ಮತ್ತು

ಬಗ = **ಕಫ** = **ಅಹ** = ಕ್ಷ'.

ಇನ್ನು ಆಯತ **ಹಡ** = ಆಯತ **ಹಬ** + ಆಯತ **ಗಕ** + ಆಯತ **ಫಡ.**

∴ **ಅಹ · ಅಡ** = **ಅಹ · ಅಬ** + **ಬಗ · ಬಕ** + **ಕಫ . ಕಡ**

ಅಂದರೆ ಕ್ಷ' (ಅ' + ಬ' + ಕ') = ಕ್ಷ' · ಅ' + ಕ್ಷ' · ಬ' + ಕ್ಷ' · ಕ'

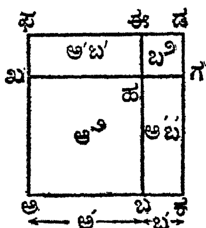
ಇದನ್ನೇ ನಾವು ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಸಿದ್ಧಮಾಡಬಹುದು.

ಕ್ಷ' (ಅ' + ಬ' + ಕ' + ಡ' + ... + ಖ') = ಕ್ಷ' · ಅ' + ಕ್ಷ' · ಬ'
+ ಕ್ಷ' . ಕ' + ಕ್ಷ' · ಡ' + ... + ಕ್ಷ' . ಖ'.

ಇದೇ ನಿಯಮವನ್ನು ಶಬ್ದಗಳಿಂದ ವಿವರಿಸುವಾಗ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯ ಬಹುದು:—

"ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಹಲವು ಭಾಗಗಳ ಮೇಲಿನ ಖಂಡಾದ ಒಂದೊಂದೇ ಭಾಗದಿಂದ ಮತ್ತು ಅಖಂಡ ರೇಖೆಯಿಂದ ಸಮಾವೇಶವಾದ ಆಯತಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಬೇರೀಜು, ಆ ಮೂಲ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮಾವೇಶ ವಾದ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇರುವದು."

[೨] $(ಅ' + ಬ')^{೨} = ಅ'^{೨} + ೨ಅ'ಬ' + ಬ'^{೨}$ ಈ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದ ಭೂಮಿತಿಯಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ:—



ಅಬಕ ರೇಖೆಯನ್ನು, **ಅಬ** = ಅ' ಮತ್ತು **ಬಕ** = ಬ' ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅಂದರೆ **ಅಬಕ** = ಅ' + ಬ'.

ಅಕಡಫ ಚೌರಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಬ** ದಿಂದ **ಬಈ** || **ಅಫ** ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ಡಫ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಈ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಡಕ ದಲ್ಲಿ **ಡಗ** = ಬ' ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ; **ಗ** ದಿಂದ **ಗಹಖ** || **ಕಅ** ತೆಗೆ ಯಿರಿ. ಆದು **ಬಈ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಹ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು **ಅಫ** ರೇಖೆ ಯನ್ನು **ಖ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಅಂದರೆ, **ಅಖ** = **ಕಗ** = **ಕಡ** − **ಗಡ** = (ಅ' + ಬ') − ಬ' = ಅ'
ಮತ್ತು **ಈಡ** = **ಬಕ** = ಬ',

ಅಂದರೆ **ಅಹ, ಹಡ** ಇವು ಚೌರಸ, ಮತ್ತು **ಫಹ, ಹಕ** ಇವು ಆಯತ ಗಳಾಗುವವು.

ಈಗ **ಅಡ** ಚೌ. =**ಅಹ** ಚೌ. + **ಹಡ** ಚೌ. + **ಘಹ** ಆ. + **ಹಕ** ಆ.

ಅಂದರೆ, **ಅಕ**^{೨} = **ಅಬ**^{೨} + **ಈಡ**^{೨} + **ಈಘ · ಈಹ**+**ಕಗ . ಬಕ**

∴ (ಅ′ + ಬ′)^೨ = ಅ′^{೨} + ಬ′^{೨} + ಅ′. ಬ′ + ಅ′. ಬ′

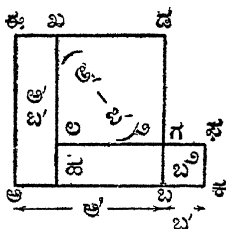
∴ (ಅ′ + ಬ′)^೨ = ಅ′^{೨} + ೨ ಅ′ಬ′ + ಬ′^{೨}

ಈ ನಿಯಮುವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬರೆದಂತೆ ಶಬ್ದರೂಪದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು:-

"ಒಂದು ಸರಳ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದಂಥ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ, ಆ ಭಾಗಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳು ಮತ್ತು ಆ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿಂದ ಸಮಾವೇಶವಾದ ಆಯತದ ಇಮ್ಮಡಿ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು, ಆ ಸಂಪೂರ್ಣ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸದಷ್ಟು ಇರುವದು."

(೩) (ಅ′ − ಬ′)^೨ = ಅ′^{೨} − ೨ ಅ′ಬ′ + ಬ′^{೨}

ಈ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದ ಭೂಮಿತಿಯಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ:



ಅಬಕ ರೇಷೆಯನ್ನು **ಅಬ** = ಅ′ ಮತ್ತು **ಬಕ** = ಬ′ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಅಬ ದ ಮೇಲೆ **ಅಬಡಈ** ಚೌರಸ ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು **ಬಕ** ದ ಮೇಲೆ **ಬಕಘಗ** ಚೌರಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. (ಎರಡೂ ಚೌರಸಗಳನ್ನು **ಅಬಕ** ದ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ ಬರುವಂತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ).

ಅಬ ದಲ್ಲಿ **ಅಹ** = ಬ′ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ; **ಹಖ** ॥ **ಬಡ** ತೆಗೆಯಿರಿ, ಅದು **ಡಈ** ಇದನ್ನು **ಖ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಘಗ ರೇಷೆಯನ್ನು ಬೆಳೆಸಿರಿ. ಅದು **ಹಖ** ರೇಷೆಯನ್ನು **ಲ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಅಂದರೆ, **ಈಹ, ಹಫ** ಆಯತಗಳಾಗುವವು.

ಹಕ = **ಹಬ** + **ಬಕ** = **ಅಬ** − **ಅಹ** + **ಬಕ** = ಅ′ − ಬ′ + ಬ′ = ಅ′.

ಗಡ = **ಬಡ** − **ಬಗ** = ಅ′ − ಬ′.

ಲಗ = **ಹಬ** = **ಅಬ** − **ಅಹ** = ಅ′ − ಬ′.

∴ **ಲಡ** ಚೌರಸ ಆಗುವದು.

ಚೌ. **ಲಡ** = ಚೌ. **ಅಡ** + ಚೌ. **ಬಫ** − ಆ. **ಅಖ** − ಆ. **ಹಫ**.

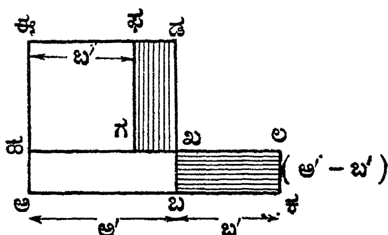
∴ **ಲಗ**^{೨} = **ಅಬ**^{೨} + **ಬಕ**^{೨} − **ಅಈ** · **ಅಹ** − **ಹಕ** · **ಕಫ**.

∴ (ಅ′ − ಬ′)^{೨} = ಅ′^{೨} + ಬ′^{೨} − ಅ′ · ಬ′ − ಅ′ · ಬ′.

ಅಂದರೆ (ಅ′ − ಬ′)^{೨} = ಅ′^{೨} − ೨ಅ′ಬ′ + ಬ′^{೨}.

[೪] ಅ′^{೨} − ಬ′^{೨} = (ಅ′ + ಬ′) (ಅ′ − ಬ′) (ಅ′ > ಬ′)

ಈ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದ ಭೂಮಿತಿಯಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ :—



ಅಬಕ ರೇಷೆಯನ್ನು, **ಅಬ** = ಅ′ ಮತ್ತು **ಬಕ** = **ಬ′** ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮತ್ತು **ಅಬ**ದ ಮೇಲೆ **ಅಬಡಈ** ಚೌರಸ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಈಡದಲ್ಲಿ **ಬ′**ದಷ್ಟು **ಈಫ** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ; ಮತ್ತು **ಈಫ**ದ ಮೇಲೆ **ಈಫಗಹ** ಚೌರಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. (**ಈಫಗಹ** ಮತ್ತು **ಈಡಬಅ** ಚೌರಸಗಳು **ಈಡ**ದ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ ಬರುವಂತೆ ಇರಬೇಕು).

ಹಗ ಬೆಳಿಸಿರಿ, ಅದು **ಬಡ**ಕ್ಕೆ **ಖ**ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. **ಕಬಖಲ** ಆಯತ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಅಂದರೆ, **ಫಡ** = ಅ′ − ಬ′; **ಬಖ** = ಅ′ − ಬ′

ಮತ್ತು **ಫಗ** = **ಬಕ** = ಬ′.

∴ ಆಯತ **ಫಖ** = ಆಯತ **ಬಲ**.

ಈಗ, **ಈಬ** ಚೌ. − **ಈಗ** ಚೌ. = **ಫಖ** ಆಯತ + **ಹಬ** ಆಯತ

= **ಬಲ** ಆಯತ + **ಹಬ** ಆಯತ

= **ಹಕ** ಆಯತ.

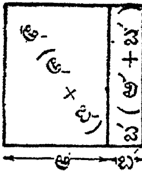
∴ **ಈಡ**೨ − **ಈಫ**೨ = **ಅಕ** · **ಕಲ**.

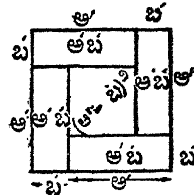
∴ ಅ′೨ − ಬ′೨ = (ಅ′ + ಬ′) (ಅ′ − ಬ′)

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಶಬ್ದರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಕ್ತಮಾಡಬಹುದು:—

"ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು, ಆ ರೇಖೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ಆಯತದಷ್ಟು ಇರುವದು."

ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಗಳಿಂದ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟ ಮಾಡಬಹುದು :





(ಅ′ + ಬ′)೨ = ಅ′ (ಅ′ + ಬ′) + ಬ′ (ಅ′ + ಬ′).

ಅ′ + ಬ′೨ − (ಅ′ − ಬ′)೨ = ೪ ಅ′ಬ′.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಬೈಜಿಕ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಭೂಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕೆಂಬುದು ಹೆಚ್ಚು ವಿಶದವಾಗುವದು :

ಉದಾ. ೧:—ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಅ, ಬ, ಕ, ಡ** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿವೆ.

ಆದರೆ ಅಕ·ಬಡ = ಅಬ·ಕಡ + ಅಡ·ಬಕ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

ಅ——ಬ——ಕ——ಡ

ಅಬ = ಅ′, ಬಕ = ಬ′, ಕಡ = ಕ′, ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ,

ಅಕ = ಅ′ + ಬ′, ಬಡ = ಬ′ + ಕ′, ಅಡ = ಅ′ + ಬ′ + ಕ′ ಆಗುವದು.

$\therefore$ ಅಕ·ಬಡ = (ಅ′ + ಬ′) (ಬ′ + ಕ′)
= ಅ′ಬ′ + ಅ′ಕ′ + ಬ′^{೨} + ಬ′ಕ′.

ಮತ್ತು ಅಬ·ಕಡ + ಅಡ·ಬಕ = ಅ′·ಕ′ + (ಅ′ + ಬ′ + ಕ′) ಬ′
= ಅ′ಕ′ + ಅ′ಬ′ + ಬ′^{೨} + ಬ′ಕ′
= ಅ′ಬ′ + ಅ′ಕ′ + ಬ′^{೨} + ಬ′ಕ′

$\therefore$ ಅಕ·ಬಡ = ಅಬ·ಕಡ + ಅಡ·ಬಕ.

ಉದಾ. ೨:—ಅಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ. ಅಬದ ಮೇಲೆ, ಅಥವಾ ಬೆಳಿಸಿದ ಅಬದ ಮೇಲೆ ಯಾವದೊಂದು, ಕ ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದರೆ ಅಕ^{೨} + ಬಕ^{೨} = ೨ ಅಮ^{೨} + ೨ ಕಮ^{೨} ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

ಅಮ = ಮಬ = ಅ′ ಮತ್ತು ಮಕ = ಬ′ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ,

ಅ—ಮ—ಕ—ಬ   ಅ—ಮ—ಬ—ಕ   ಕ—ಅ—ಮ—ಬ

ಆ. ೧   ಆ. ೨   ಆ. ೩

ಆ. ೧ರಲ್ಲಿ ಅಕ = ಅಮ + ಮಕ = ಅ′ + ಬ′
ಮತ್ತು ಕಬ = ಮಬ − ಮಕ = ಅ′ − ಬ′

ಆ. ೨ರಲ್ಲಿ ಅಕ = ಅಮ + ಮಕ = ಅ′ + ಬ′
ಬಕ = ಮಕ − ಮಬ = ಬ′ − ಅ′

ಆ. ೩ರಲ್ಲಿ ಅಕ = ಮಕ − ಮಅ = ಬ′ − ಅ′
ಬಕ = ಬಮ + ಮಕ = ಅ′ + ಬ′

∴ ಮೂರೂ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ,

$$\text{ಅಕ}^{೨} + \text{ಬಕ}^{೨} = (\text{ಅ}' + \text{ಬ}')^{೨} + (\text{ಅ}' - \text{ಬ}')^{೨}$$
$$= ೨\,\text{ಅ}'^{೨} + ೨\,\text{ಬ}'^{೨}$$
$$= ೨\,\text{ಅಮ}^{೨} + ೨\,\text{ಕಮ}^{೨}.$$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೧೭.

ಕೆಳಗಿನ ೧ ರಿಂದ ೭ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಸ್ಪಷ್ಟ ಮಾಡುವ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಆ ಆಕೃತಿಗಳ ಮೇಲಿಂದ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯಬಹುದೆಂಬದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧. $(೨\text{ಅ}')^{೨} = ೪\text{ಅ}'^{೨}$

೨. $(೩\text{ಅ}')^{೨} = ೯\text{ಅ}'^{೨}$

೩. $\text{ಅ}'\,(\text{ಕ್ಷ}' - \text{ಯ}') = \text{ಅ}'\text{ಕ್ಷ}' - \text{ಅ}'\text{ಯ}'.$

೪. $(\text{ಅ}' + \text{ಬ}')\,(\text{ಕ್ಷ}' + \text{ಯ}') = \text{ಅ}'\text{ಕ್ಷ}' + \text{ಅ}'\text{ಯ}' + \text{ಬ}'\text{ಕ್ಷ}' + \text{ಬ}'\text{ಯ}'.$

೫. $(\text{ಅ}' - \text{ಬ}')\,(\text{ಕ್ಷ}' - \text{ಯ}') = \text{ಅ}'\text{ಕ್ಷ}' - \text{ಅ}'\text{ಯ}' - \text{ಬ}'\text{ಕ್ಷ}' + \text{ಬ}'\text{ಯ}'.$

೬. $(\text{ಅ}'+\text{ಬ}'+\text{ಕ}')^{೨} = \text{ಅ}'^{೨}+\text{ಬ}'^{೨}+\text{ಕ}'^{೨}+೨\text{ಅ}'\text{ಬ}'+೨\text{ಬ}'\text{ಕ}'+೨\text{ಕ}'\text{ಅ}'.$

೭. $(\text{ಕ್ಷ}' + ೨)\,(\text{ಕ್ಷ}' + ೩) = \text{ಕ್ಷ}'^{೨} + ೫\text{ಕ್ಷ}' + ೬.$

೮. ಅಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕ ಇದೊಂದು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಅದೆ. ಅಬ ದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ಬೆಳಿಸಿದ ಅಬ ದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$\text{ಅಪ}\,.\,\text{ಪಬ} = \text{ಅಕ}^{೨} \sim \text{ಕಪ}^{೨}.$

೯. ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅ, ಬ, ಕ, ಡ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

(೧) $\text{ಅಕ}^{೨} + \text{ಬಡ}^{೨} = \text{ಅಬ}^{೨} + \text{ಕಡ}^{೨} + ೨\text{ಅಡ}\,.\,\text{ಬಕ}.$

(೨) $\text{ಅಡ}^{೨} + \text{ಬಕ}^{೨} = \text{ಅಕ}^{೨} + \text{ಬಡ}^{೨} + ೨\text{ಅಬ}\,.\,\text{ಕಡ}.$

೧೦. ಅಬ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕ ಬಿಂದುವನ್ನು $\text{ಅಬ}\cdot\text{ಬಕ} = \text{ಅಕ}^{೨}$ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಆದರೆ $\text{ಅಬ}^{೨} + \text{ಬಕ}^{೨} = ೩\text{ಅಕ}^{೨}$; ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೧೧. ಒಂದು ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಮಾಡಿರಿ. ಅಂದರೆ ಆವೆರಡು ಭಾಗಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ಆಯತವು ಮಹತ್ತಮ (ದೊಡ್ಡದು) ಆಗುವದು. (ಉದಾ. ೮ ನೋಡಿರಿ)

೧೨. ಒಂದು ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಅವೆರಡು ಭಾಗಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು ಶಕ್ಯವಾದಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಇರಬೇಕು.

೧೩. ಒಂದು ಕೋಣೆಯ ಉದ್ದಳತೆಯು ಅದರ ಅಗಲಳತೆಗಿಂತ ೪ ಫೂಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಕೋಣೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೧೯೨ ಚೌ. ಫೂ. ಇದ್ದರೆ ಆ ಕೋಣೆಯ ಉದ್ದಗಲ ಅಳತೆಗಳು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ?

೧೪. ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿ ಹೊಲದ ಉದ್ದಳತೆಯು ಅದರ ಅಗಲಳತೆಯ ಇಮ್ಮಡಿ ಇದೆ. ಹೊಲದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ೩೨೦೦ ಚೌ. ಯಾರ್ಡ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲ ಎಷ್ಟು ?

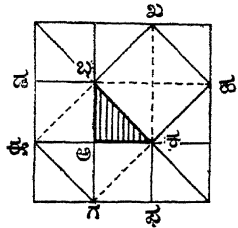
೧೫. ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿ ತೋಟವು ೬೦ ಯಾರ್ಡ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ೪೫ ಯಾರ್ಡ ಅಗಲ ಇದೆ. ಆ ತೋಟದ ಸುತ್ತಲು ಒಳಬದಿಗೆ ೧ ಫೂಟು ಅಗಲಾದ ಕಾಲು ದಾರಿ ಇದ್ದರೆ, ಆ ದಾರಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವೆಷ್ಟು ?

---

೧೯ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ.

ಪಾಯ್‌ಥಾಗೋರಸ್ (Pythagoras) ಸಿದ್ಧಾಂತ.

ಪಾಯ್‌ಥಾಗೋರಸ್‌ನ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಭೂಮಿತಿಯ ಅತ್ಯಂತ ಮಹತ್ವದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿದೆ. ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳಲ್ಲಿಯ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.



ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಂತೆ ಒಂದು ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಹಾಸುಕಲ್ಲಿನಿಂದ ನೆಲಗಟ್ಟುಮಾಡಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಲ್ಲು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದ **ಅಬಕ** ತುಂಡನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಅಬ ಭುಜದ ಮೇಲೆ ಇಂಥ ಎರಡು ತುಂಡುಗಳು ಕೂಡಿ **ಅಬಡಈ** ಚೌರಸವಾಗಿದೆ. ಮತ್ತು **ಅಕ** ಭುಜದ ಮೇಲೆ **ಅಬಕ** ದಂಥ ಎರಡು ತುಂಡು ಕೂಡಿ **ಅಕಫಗ** ಚೌರಸವಾಗಿದೆ. **ಬಕ** ದ ಮೇಲಿನ **ಬಖಹಕ** ಚೌರಸದಲ್ಲಿ ಇಂಥ ನಾಲ್ಕು ತುಂಡುಗಳಿವೆ. ಈ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಅವಲೋಕನೆಯಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ತಿಳಿದ ಸಂಗತಿಯೇನಂದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ,

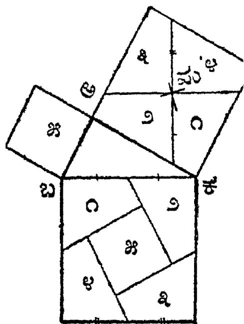
ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸ = ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು.

ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮದ್ವಿಭುಜವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ ಕೂಡ, ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಸತ್ಯವಿರುವದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಿಕ್ಕೆ ಅ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕಾಟಕೋನ ಮಾಡುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉದ್ದಳತೆಯ ಭುಜಗಳುಳ್ಳ **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳಿಂದ **ಅಬ**^{2} + **ಅಕ**^{2} = **ಬಕ**^{2} ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೋ ಇಲ್ಲವೋ ನೋಡಿರಿ.

ಈ ಚೌರಸಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕೂಲವಾದಷ್ಟು ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದರ ನಂತರ ಮತ್ತೊಂದು ಎತ್ತಿ ಇಟ್ಟು ಹೊಂದಿಸಿ, ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತ

ವನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಲು ಬರುವದೋ ಎಂಬದನ್ನು ನೋಡಬಹುದು. ಈ ಪ್ರಕಾರ ತುಂಡುಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡುವ ಅನೇಕ ರೀತಿಗಳುಂಟು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ '**ಫೆರಿಗಲ್**' ಇವನ ರೀತಿಯು ಕೆಳಗಿನಂತೆ:—

ಸ್ವಲ್ಪ ದಪ್ಪ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ **ಅಬಕ** ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ∠ **ಅ** ಇದು ಕಾಟಕೋನ ಇರಬೇಕು. ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಮೇಲೆ ಒಂದೊಂದು ಚೌರಸ ತೆಗೆಯಿರಿ.

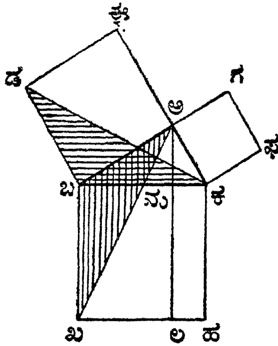


ಅಕ ಭುಜದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸದಲ್ಲಿಯ **ಮ** ಬಿಂದುವು ಆ ಚೌರಸದ ಕರ್ಣ ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಆಗಿದೆ. **ಮ** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ **ಬಕ**ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಲಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನೂ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಾಲ್ಕು ತುಂಡುಗಳು ಆಗುವವು. ಈ ನಾಲ್ಕು ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಬೇರೆ ಮಾಡಿರಿ; ಮತ್ತು **ಅಬ** ಭುಜದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸ ಕತ್ತರಿಸಿ ಬೇರೆ ಮಾಡಿರಿ. ಆ ಎಲ್ಲ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ **ಬಕ** ಭುಜದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸದಲ್ಲಿ ಅಂಕೆಗಳಿಂದ ಗುರುತಿಸಿದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿಸಿಡಿರಿ. ಅಂದರೆ ಆ ಎಲ್ಲ ತುಂಡುಗಳ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು **ಬಕ** ಭುಜದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದಷ್ಟು ಇರುವದೆಂದು ನೀವು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಕಾಣಬಹುದು.

ಆದರೆ ಇದು **ಪ್ರಯೋಗ-ಸಿದ್ಧ ನಿದರ್ಶನ**ವಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಸಿದ್ಧತೆಯೆಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವಂತಿಲ್ಲ. ಮುಂದಿನ ಪುಟದ ಮೇಲೆ ಇದರ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕ್ರಿಸ್ತಶಕ ಪೂರ್ವದ ಮೂರನೆಯ ಶತಕದಲ್ಲಿ **ಯುಕ್ಲಿಡ** ಎಂಬ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗ್ರಂಥಕರ್ತನು ತನ್ನ 'ಭೂಮಿತಿಯ ಮೂಲತತ್ವಗಳು' ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ.

ಪ್ರಮೇಯ ೩೨ [ಪಾಯಥಾಗೋರಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತ]

ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸವು, ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ∠ಅ ಕಾಟಕೋನವಿದೆ. **ಅಬ, ಬಕ, ಕಅ** ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ಅವುಗಳ ಹೊರಮಗ್ಗಲು **ಅಬಡಈ, ಬಕಹಖ, ಕಅಗಫ** ಚೌರಸಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ತೆಗೆದಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— **ಬಕ** ಮೇಲಿನ ಚೌರಸ = **ಅಬ** ಮೇಲಿನ ಚೌರಸ
+ **ಅಕ** ಮೇಲಿನ ಚೌರಸ.

ರಚನೆ:— **ಬಖ**ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ **ಅಲ** ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ಹಖ** ರೇಷೆಯನ್ನು **ಲ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು **ಬಕ** ರೇಷೆಯನ್ನು **ಮ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಅಖ, ಕಡ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:—[ಈ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿ **ಬಈ** ಚೌರಸ = **ಬಲ** ಆಯತ, ಮತ್ತು **ಕಗ** ಚೌರಸ = **ಕಲ** ಆಯತ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.]

∠**ಕಅಬ** + ∠**ಬಅಈ** = ೨ ಕಾಟಕೋನಗಳು.

∴ **ಕಅಈ** ಇದು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಷೆಯು.

ಬಅಈಡ ಚೌರಸ ಮತ್ತು △ **ಬಕಡ** ಇವೆರಡು **ಬಡ** ಒಂದೇ ತಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತು **ಕಈ, ಬಡ** ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಯುಗ್ಮ ದಲ್ಲಿವೆ;

∴ **ಬಅಈಡ** ಚೌರಸದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ೨△ **ಬಕಡ**....(೧) ಅದರಂತೆ, **ಬಮಲಖ** ಆಯತವು ಮತ್ತು △ **ಬಅಖ** ಇವು, **ಬಖ** ಒಂದೇ ತಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತು **ಬಖ, ಅಲ** ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿವೆ.

∴ **ಬಮಲಖ** ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ೨ △ **ಬಅಖ**....(೨) ಇನ್ನು, ನಾವು **ಬಕಡ** ಮತ್ತು **ಬಅಖ** ತ್ರಿಕೋನಗಳ ತುಲನೆ ಮಾಡೋಣ;

∠ **ಕಬಡ** = ∠ **ಕಬಅ** + ∠ **ಅಬಡ;**
= ∠ **ಕಬಅ** + ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ;
= ∠ **ಕಬಅ** + ∠ **ಖಬಕ;**
= ∠ **ಖಬಅ.**

ಅದಕ್ಕಾಗಿ **ಬಕಡ, ಬಅಖ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ

ಬಕ = **ಬಖ,** (ಚೌರಸದ ಭುಜ)
ಬಡ = **ಬಅ,** (,, ,,)
∠ **ಕಬಡ** = ∠ **ಖಬಅ** (ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದೆ.)

∴ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಆಗಿವೆ; ಮತ್ತು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಇವೆ.

ಪರಂತು, **ಅಬಡಈ** ಚೌರಸ = ೨ △ **ಬಕಡ** [ಮೇಲೆ (೧) ನೋಡಿರಿ.]
ಮತ್ತು **ಬಮಲಖ** ಆಯತ = ೨ △ **ಬಅಖ** [ಮೇಲೆ (೨) ನೋಡಿರಿ.]

∴ **ಅಬಡಈ** ಚೌರಸ = **ಬಮಲಖ** ಆಯತ.

ಇದರಂತೆ, **ಅಕಫಗ** ಚೌರಸ = **ಕಮಲಹ** ಆಯತ ಎಂದು ತೋರಿಸ ಬಹುದು.

∴ **ಬಕಹಖ** ಚೌರಸ = **ಬಮಲಖ** ಆಯತ + **ಕಮಲಹ** ಆಯತ
= **ಅಬಡಈ** ಚೌರಸ + **ಅಕಫಗ** ಚೌರಸ

ಅಂದರೆ, **ಬಕ** ಮೇಲಿನ ಚೌರಸ = **ಅಬ** ಮೇಲಿನ ಚೌರಸ
+ **ಅಕ** ಮೇಲಿನ ಚೌರಸ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:- **ಕಆಈ** ಇದು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯೆಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡುವದನ್ನು ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯರು ಮರೆಯುವದುಂಟು. ಆದರೆ **ಬಡ** ಮತ್ತು **ಕಈ** ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ ಸಿದ್ಧಮಾಡುವಾಗ ಈ ಮಾತು ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ಸಿದ್ಧವಾಗಿರಬೇಕೆಂಬುದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದ ಸಂಗತಿಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಮರೆಯಬಾರದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೧:— △ **ಅಬಕ**ದಲ್ಲಿ ∠ **ಅ** ಕಾಟಕೋನ ಇದ್ದು, **ಅಮ** ರೇಖೆಯು **ಬಕ** ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ,

ಅಬ^{೨} = **ಬಕ · ಬಮ** ಮತ್ತು **ಅಕ**^{೨} = **ಕಬ · ಕಮ.**

ಕಾರಣ, ಮೇಲೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದಂತೆ,

ಅಬಡಈ ಚೌರಸ = **ಬಮಲಖ** ಆಯತ;

ಅಂದರೆ **ಅಬ**^{೨} = **ಬಖ · ಬಮ** = **ಬಕ . ಬಮ.**

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೨:— △ **ಅಬಕ**ದಲ್ಲಿ ∠ **ಅ** ಕಾಟಕೋನ ಇದ್ದು, **ಅಮ** ರೇಖೆಯು **ಬಕ** ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ,

ಅಮ^{೨} = **ಬಮ · ಮಕ.**

ಸಿದ್ಧತೆ:- **ಅಬ**^{೨}=**ಅಮ**^{೨}+**ಬಮ**^{೨} (**ಅಮಬ** ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ)

ಅಕ^{೨}=**ಅಮ**^{೨}+**ಕಮ**^{೨} (**ಅಮಕ** ,, ,,)

ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿ **ಅಬ**^{೨}+**ಅಕ**^{೨} = ೨**ಅಮ**^{೨}+ **ಬಮ**^{೨} + **ಕಮ**^{೨} ....(೧)

ಪರಂತು, **ಅಬ**^{೨}+**ಅಕ**^{೨} = **ಬಕ**^{೨}

= (**ಬಮ** + **ಮಕ**)^{೨}

= **ಬಮ**^{೨} + **ಮಕ**^{೨}

+ ೨ **ಬಮ · ಮಕ**....(೨)

(೧) ಮತ್ತು (೨) ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಉಭಯ ಸಮಾನ ಪದಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ೨ **ಅಮ**^{೨} = ೨**ಬಮ · ಮಕ** ಹೀಗೆ ಸಿದ್ಧ ಆಗುವದು.

∴ **ಅಮ**^{೨} = **ಬಮ · ಮಕ.**

ಈ ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ, ಕೊಟ್ಟ ಆಯತಕ್ಕೆ ಸಮ-ಕ್ಷೇತ್ರವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ಚೌರಸವನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು.

ಪಾಯ್‌ಥಾಗೋರಸ್ ಹೆಸರಿನ ಗ್ರೀಸ್ ದೇಶದ ಗಣಿತಜ್ಞನು ಮೊದಲು ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಶೋಧಿಸಿದನೆಂದು ತಿಳಿಯುವರು. (ಕ್ರಿಸ್ತಶಕ ಪೂರ್ವ ೫೭೦ ರಿಂದ ೫೦೦; ಇವನ ಕಾಲ) ಪರಂತು ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಕೆಲವು ವಿಶಿಷ್ಟ ರೂಪಗಳು ಭಾರತ ಮತ್ತು ಈಜಿಪ್ತ ದೇಶದ ಜನರಿಗೆ ಇದಕ್ಕೂ ಮೊದಲು ಗೊತ್ತಿದ್ದವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. **ಬೌಧಾಯನನ** ಸೂತ್ರಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ:—

|| ಸಮಚತುರಸ್ರಸ್ಯಾಕ್ಷ್ಣಯಾರಜ್ಜುರ್ದ್ವಿಸ್ತಾವತೀಂ ಭೂಮಿಂ ಕರೋತಿ ||

ಅಂದರೆ, "ಚೌರಸದ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಜಗ್ಗಿದ ದಾರದಿಂದ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಇಮ್ಮಡಿ ಆಗುವದು.'' ಇದರ ನಿಜವಾದ ಅರ್ಥವು ''ಚೌರಸದ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು, ಮೂಲ ಚೌರಸದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಇಮ್ಮಡಿ ಇರುವದು," ಎಂದು ಆಗುವದು.

||ದೀರ್ಘಚತುರಸ್ರಸ್ಯಾಕ್ಷ್ಣಯಾರಜ್ಜುಃ ಪಾರ್ಶ್ವಮಾನೀ ತಿರ್ಯಙ್ಮಾನೀಚ ಯತ್ಪೃಥಗ್‌ಭೂತೇ ಕುರುತ-ಸ್ತದುಭಯಂ ಕರೋತಿ||.

ಅಂದರೆ, ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಕಿರಿ ಬದಿ ಇವುಗಳ ಮೇಲಿನ ದಾರದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ (ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ) ಇವು ಇಬ್ಬದಿಯಷ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಆಯತದ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಜಗ್ಗಿದ ದಾರದಿಂದ ಆಗುವದು." ಇದರ ನಿಜವಾದ ಅರ್ಥವು ''ಆಯತದ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸವು ಆಯತದ ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುವದು." ಎಂದು ಆಗುವದು.

***ಪಾಯ್‌ಥಾಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಬೇರೆ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ರೂಪರೇಷೆಯು:—**

[೧] **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದ ∠ **ಕ** ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

ಕಬ ರೇಷೆಯನ್ನು **ಬಡ** ಇದು **ಅಕ**ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಬೆಳಿಸಿರಿ.

ಕಅ ,, **ಅಫ** ,, **ಕಬ** ,, ,,

ಕಡಈಫ ಚೌರಸ ಪೂರ್ಣಮಾಡಿರಿ. ಮತ್ತು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ **ಪ** ಮತ್ತು **ಖ** ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, **ಬಪ, ಪಖ, ಖಅ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಇದರಿಂದ ಕಂಡುಬರುವದೇನಂದರೆ, ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣುವ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪವಾಗಿರುವವು. ಮತ್ತು **ಅಬಪಖ** ಇದು ಚೌರಸವಿದೆ.

ಫ ಬ' ಖ ಅ' ಈ
ಬ'
ಅ' ಪ
ಅ ಕ' ಅ'
ಬ'
ಕ ಅ' ಬ ಬ' ಡ

ಕಡ^2 = ೪ $\triangle$ **ಅಬಕ** + **ಅಬ**^{2}

$\therefore$ (ಅ'+ಬ')^2=೪ ($\frac{1}{2}$ ಅ'ಬ') + (ಕ')^2

$\therefore$ ಅ'^{2}+ ೨ಅ'ಬ'+ ಬ'^{2}= ೨ಅ'ಬ' + ಕ'^{2}

$\therefore$ ಅ'^{2} + ಬ'^{2} = ಕ'^{2}.

[೨] **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\angle$ **ಕ** ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

ಬಕ, ಕಅ ಇವುಗಳ ಹೊರಬದಿಯಲ್ಲಿ **ಬಕಡಈ, ಕಅಫಗ** ಚೌರಸಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಫಗ, ಈಡ ಬೆಳೆಸಿರಿ. ಅವು **ಹ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು.

ಕಹ ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಬೆಳೆಸಿರಿ. ಅದು **ಅಬ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಖ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಅಬ ಮೇಲೆ **ಅ** ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಲಂಬವು **ಫಗ**ಕ್ಕೆ **ಮ** ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು;
ಅಬ ,, **ಬ** ,, ,, ,, **ಈಹ** **ಲ** ,, ,,

ಮಲ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅದು **ಹಖ**ವನ್ನು **ನ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಅಂದರೆ $\triangle$ **ಅಬಕ**, $\triangle$ **ಹಕಡ** ಏಕರೂಪ ಇರುವವು.

$\therefore$ **ಹಕ** = **ಅಬ** ಮತ್ತು $\angle$ **ಹಕಡ** = $\angle$ **ಅಬಕ**

$\therefore$ **ಹಖ** $\perp$ **ಅಬ**

$\therefore$ **ಹಕ** $\parallel$ **ಮಅ** $\parallel$ **ಲಬ**

$\therefore$ **ಹಕಅಮ, ಹಕಬಲ** ಇವು ಸಮಾ. ಭು. ಚೌ.ಗಳು.

$\therefore$ **ಅಮ** = $\parallel$ **ಬಲ** ಮತ್ತು
ಅಮ = **ಹಕ** = **ಅಬ**

$\therefore$ **ಅಬಲಮ** ಇದು ಚೌರಸ ಆಗುವದು.

ಇನ್ನು, **ಕಅಫಗ**= **ಕಅಮಹ**
= **ಅಮನಖ**

ಹ
ಗ
ಮ ನ ಲ
ಫ ಡ
ಕ
ಈ
ಅ ಖ ಬ

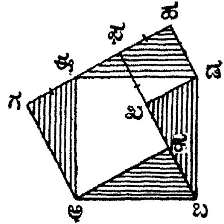
ಮತ್ತು **ಬಕಡಈ** = **ಬಕಹಲ** = **ಬಖನಲ**

∴ **ಕಅಫಗ** + **ಬಕಡಈ** = **ಅಮನಖ** + **ಬಖನಲ**

∴ **ಅಕ**^{2} + **ಬಕ**^{2} = **ಅಬ**^{2}.

[೩] **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ∠**ಕ** ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

ಅಕ ದ ಮೇಲೆ ಅದರ ಹೊರಮಗ್ಗಲು **ಅಕಫಗ** ಚೌರಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಗಫ** ದಲ್ಲಿ **ಬಕ** ದಷ್ಟು **ಗಈ** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಬೆಳೆಸಿದ **ಗಫ** ದಲ್ಲಿ **ಬಕ** ದಷ್ಟು **ಫಹ** ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಹಡ** ∥ **ಫಕ** ಮತ್ತು **ಖಡ** ∥ **ಫಹ** ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಈ, ಈಡ, ಡಬ** ಕೂಡಿ ಸಿರಿ. **ಫಕ** ದಲ್ಲಿ **ಬಕ** ದಷ್ಟು **ಫಖ** ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.



ಅಬಕ, ಅಈಗ, ಈಡಹ, ಬಡಖ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಆಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ; ಮತ್ತು **ಅಬಡಈ** ಇದು ಚೌರಸ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಇದರಿಂದ, ಚೌ. **ಅಬಡಈ**=△ **ಅಬಕ** + △ **ಬಡಖ** + ಆಕೃತಿ **ಅಕಖಡಈ**

=△ **ಈಡಹ**+△ **ಅಈಗ**+ ,, ,,

=ಚೌ. **ಅಕಫಗ** + ಚೌ. **ಫಹಡಖ**.

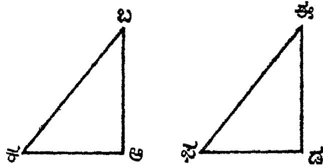
∴ **ಅಬ**^{2} = **ಅಕ**^{2} + **ಬಕ**^{2}.

[ಇದನ್ನು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಬೇಕಾದರೆ, **ಅಬಕ, ಬಡಖ** ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು **ಅಬಡಈ** ಚೌರಸದೊಳಗಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ; ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ **ಈಡಹ, ಅಈಗ** ಸ್ಥಳಗಳ ಮೇಲಿಡಿರಿ. ಅಂದರೆ ನಿಮಗೆ ಇದರ ಸತ್ಯತೆಯು ಕಂಡುಬರುವದು.]

ಪ್ರಮೇಯ ೩೩.

[ಪಾಯ್‌ಥಾಗೋರಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ]

ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸವು ಅದರ ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಕಾಟಕೋನ ಇರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ **ಬಕ**^{2} = **ಅಬ**^{2} + **ಅಕ**^{2}

ಸಾಧ್ಯ:— $\angle$ **ಅ** ಇದು ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

ರಚನೆ:— $\angle$ **ಡ** ಇದು ಕಾಟಕೋನವಾಗುವಂತೆ ಮತ್ತು **ಡಈ** = **ಅಬ**, **ಡಫ** = **ಅಕ** ಆಗುವಂತೆ **ಡಈಫ** ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— $\triangle$ **ಡಈಫ** ದಲ್ಲಿ $\angle$ **ಡ** ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

$\therefore$ **ಈಫ**^{2} = **ಡಈ**^{2} + **ಡಫ**^{2} (ಪಾಯಥಾ. ಸಿ.)
= **ಅಬ**^{2} + **ಅಕ**^{2} (ರಚನೆ)
= **ಬಕ**^{2} (ಪಕ್ಷ)

$\therefore$ **ಈಫ** = **ಬಕ**.

ಇನ್ನು **ಅಬಕ**, **ಡಈಫ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

ಅಬ = **ಡಈ** (ರಚನೆ)
ಅಕ = **ಡಫ** (,,)
ಬಕ = **ಈಫ** (ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿದೆ)

$\therefore$ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುವವು.

$\therefore$ $\angle$ **ಅ** = $\angle$ **ಡ**
= ಕಾಟಕೋನ (ರಚನೆ).

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೧೮.

[ಅಂಕಾತ್ಮಕ]

೧. $೨^{೨} + ೫^{೨} = ೨೯$ ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, $\sqrt{೨೯}$ ಸೆ. ಮಿ. ಉದ್ದವಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೨. $೪^{೨} - ೩^{೨} = ೭$ ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, $\sqrt{೭}$ ಸೆ. ಮಿ. ಉದ್ದಳತೆಯ ಸರಳ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩. $೨^{೨} + ೧^{೨} + ೧^{೨} + ೧^{೨} = ೭$ ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, $\sqrt{೭}$ ಸೆ. ಮಿ. ಸರಳ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಉದಾ. ೨ರಲ್ಲಿ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

೪. $೩^{೨} + ೪^{೨} = ೫^{೨}$; $೧೨^{೨} + ೫^{೨} = ೧೩^{೨}$; $೮^{೨} + ೧೫^{೨} = ೧೭^{೨}$ ಇದರಂತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು, ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗದಷ್ಟು ಇರುವಂಥ, ಇನ್ನೂ ಹಲವು ಪೂರ್ಣ ಅಂಕೆಗಳ ಜೋಡಣಿಗಳನ್ನು ನೀವು ಹೇಳ ಬಲ್ಲಿರಾ?

೫. ಮ ಮತ್ತು ನ ಇವು ಪೂರ್ಣ ಅಂಕೆಗಳು. $ಮ^{೨} + ನ^{೨}$, $ಮ^{೨} - ನ^{೨}$, ೨ ಮನ ಸೆ. ಮಿ. ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನವು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೬. ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜವು ೮ ಇಂಚು, ಮತ್ತು ಕರ್ಣವು ೧೭ ಇಂಚು ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜವೆಷ್ಟು?

೭. ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಹೊಲದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೬೦೦೦ ಚೌ. ಯಾರ್ಡ ಇದೆ. ಅದರದೊಂದು ಕರ್ಣವು ೧೩೦ ಯಾರ್ಡ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಹೊಲದ ಉದ್ದ–ಅಗಲ ಅಳತೆಗಳೆಷ್ಟು?

[$ಕ್ಷ^{೨} + ಯ^{೨} + ೨ಕ್ಷಯ = (ಕ್ಷ + ಯ)^{೨}$ ಮತ್ತು $ಕ್ಷ^{೨} + ಯ^{೨} - ೨ಕ್ಷಯ = (ಕ್ಷ - ಯ)^{೨}$. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

೮. ಒಂದು ಸಮ ದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ತಳ ರೇಖೆಯು ೩೦ ಇಂಚು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜ ೨೫ ಇಂಚು ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

೯. ೨ ಇಂಚು ಭುಜವಿದ್ದ ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು ಇರುವದು?

೧೦. ೧೫ ಫೂಟು ಉದ್ದವಾದ ಒಂದು ಏಣಿ (ನಿಚ್ಚಣಿಕೆ)ಯನ್ನು ಗೋಡೆಗೆ ತಾಗಿಸಿ ಇಟ್ಟಿದೆ. ಅದರ ಕೆಳಗಿನ ತುದಿಯು ಗೋಡೆಯಿಂದ ೯ ಫೂಟಿನ ಮೇಲಿದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಮೇಲಿನ ತುದಿಯು ನೆಲದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿದೆ ಎಂಬದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೧. ನೆಲದಿಂದ ೧೫ ಫೂಟು ಎತ್ತರದ ಮೇಲೆ, ಮೇಲಿನ ತುದಿ ಮತ್ತು ನೆಲದಿಂದ ೮ ಫೂಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಕೆಳಗಿನ ತುದಿ ಬರುವಂತೆ ಒಂದು ಏಣಿಯನ್ನು ಗೋಡೆಗೆ ತಾಗಿಸಿ ಇಟ್ಟಿದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೨. ಒಂದು ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ ೨.೬೪ ಇಂಚು ಮತ್ತು ೧.೧ ಇಂಚು ಇರುವವು. ಆದರ ಭುಜವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೩. ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವು ೩.೭ ಇಂಚು ಮತ್ತು ಅದರ ಕರ್ಣ ೨.೪ ಇಂಚು ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಇನ್ನೊಂದು ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆಯೆಷ್ಟು?

೧೪. ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬವು, ಅದನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದು. ಆದರೆ,

(೧) ೧.೫ ಇಂಚು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ೧.೨ ಇಂಚು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆ, ಮತ್ತು

(೨) ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ೧೦ ಇಂಚು ಉದ್ದವಾದ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ೧ ಫೂಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿದೆ. ಈ ವರ್ತುಳದ ಯಾವದೊಂದು ತ್ರಿಜ್ಯ ರೇಖೆ.

ಇವುಗಳ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೫. ತನ್ನ ಸುತ್ತ ತಿರುಗುವ ಒಂದು ತೋಫಿನ ಶಕ್ತಿಯು ೩.೪ ಮೈಲುಗಳ ವರೆಗೆ ಇದೆ. ಆ ತೋಫು ಮಾರ್ಗದಿಂದ ೧.೬ ಮೈಲು ಅಂತರದಲ್ಲಿದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಶಕ್ತಿಯೊಳಗೆ ಬರುವ ಮಾರ್ಗವು ಎಷ್ಟು ಉದ್ದವಾಗಿರಬಹುದು?

೧೬. ನದಿಯ ಒಂದು ದಂಡೆಯು ಇನ್ನೊಂದು ದಂಡೆಯಿಂದ ೧೨೦ ಯಾರ್ಡು ಇದೆ. ನದಿಯನ್ನು ದಾಟುವಾಗ ಅಂಬಿಗನು ಇನ್ನೊಂದು ದಂಡೆಯ ಕೆಳಬದಿಗೆ ೩೬ ಯಾರ್ಡ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಬಂದು ಮುಟ್ಟಿದನು. ಆದರೆ ಅವನು ಈಸಿದ ಮಾರ್ಗದ ಉದ್ದಳತೆಯೆಷ್ಟು?

೧೭. ಎರಡು ಕಂಬಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ ೫೦ ಮತ್ತು ೫೫ ಫೂಟ ಇವೆ. ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ೧೨ ಫೂಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿವೆ. ಆದರೆ ಆ ಕಂಬಗಳ ತುದಿಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು?

೧೮. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ೧೩, ೧೪, ೧೫ ಇಂಚುಗಳಿದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಹೇಳಿರಿ.

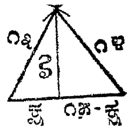
[$ಉ^{೨} = ೧೩^{೨} - ಕ್ಷ^{೨} = ೧೪^{೨} - (೧೫ - ಕ್ಷ)^{೨}$;

$\therefore$ ೩೦ ಕ್ಷ = ೧೯೮; $\therefore$ ಕ್ಷ = ೬.೬.

$\therefore$ $ಉ = \sqrt{(೧೩^{೨} - ೬.೬^{೨})} = ೧೧.೨$

$\therefore$ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $\frac{೧}{೨} \times ೧೫ \times ಉ = \frac{೧}{೨} \times ೧೫ \times ೧೧.೨$

$= ೧೫ \times ೫.೬ =$ ೮೪ ಚೌ. ಇ.]



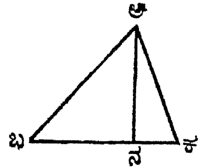
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೧೯.

(ಔಪಪತ್ತಿಕ)

೧. ಚೌರಸದ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸವು ಮೂಲ ಚೌರಸದ ಇವ್ಮಡಿ ಇರುವದು.

೨. ಅಬಕ ಇದೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. ಅನ ⊥ ಬಕ. ಆದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

ಅಬ^{೨} − ಅಕ^{೨} = ಬನ^{೨} − ಕನ^{೨}. ಮತ್ತು ಅನ ಅಥವಾ ಬೆಳಿಸಿದ ಅನದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.



ಪಬ^{೨} − ಪಕ^{೨} = ಅಬ^{೨} − ಅಕ^{೨}.

೩. △ ಅಬಕ ಸಮಭುಜ ಇದೆ. ಅಡ ⊥ ಬಕ. ಆದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ. ಅಡ^{೨} = ೩ ಬಡ^{೨}. ಅಬ = ೨ಪ ಇದ್ದರೆ, ಅಡ = $\sqrt{೩}$ಪ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಅರ್ಧ ಅಬಡ ಇದು ಮಹತ್ವದ್ದಾಗಿದೆ. ಅದರ ಕೋನಗಳು ೩೦°, ೬೦°, ೯೦° ಹೀಗಿವೆ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳು ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ ಪ, $\sqrt{೩}$ಪ, ೨ಪ ಇರುವವು.)

೪. △ ಅಬಕದಲ್ಲಿ ∠ಬ = ೩೦°, ∠ಕ = ೪೫°, ಅಡ ⊥ ಬಕ, ಆದರೆ ಬಡ^{೨} = ೩ ಕಡ^{೨} ಎಂಬದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು, ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸದ ನಾಲ್ಮಡಿ (ನಾಲ್ಕುಪಟ್ಟು) ಇರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೬. ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು, ಆದರ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸದಷ್ಟು ಇರುವದು.

೭. ಪ್ರಮೇಯ ೩೨ನೆಯ ಆಕೃತಿ ನೋಡಿ ಹೇಳಿರಿ:—

(೧) ಡ, ಅ, ಫ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿವೆ.

(೨) △ಡಬಖ, △ಈಅಗ, △ಫಕಹ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು △ಅಬಕ ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿದೆ.

(೩) ಅಖ, ಕಡ ಇವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ.

(೪) ಬಈ ∥ ಕಗ

೮. ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಯು ಅದರ ಜ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದು, ಆದರೆ ವರ್ತುಳದ :—

(೧) ಸಮಾನ ಜ್ಯಾರೇಖೆಗಳು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವವು.

(೨) ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.

೯. ಅಬಕಡ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ಅಕ $\perp$ ಬಡ, ಆದರೆ ಅಬ^{೨} + ಕಡ^{೨} = ಬಕ^{೨} + ಅಡ^{೨} ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೦. $\triangle$ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ $\angle$ ಕ ಕಾಟಕೋನವಿದೆ. ಮ, ನ ಇವು ಕಅ ಮತ್ತು ಕಬ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು. ಆದರೆ ಅಮ^{೨} + ಬನ^{೨} = ಮನ^{೨} ಎಂಬದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೧. $\triangle$ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ $\angle$ ಕ ಕಾಟಕೋನವಿದೆ. ಕಅ ದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಮ ಬಿಂದುವಿದೆ. ಆದರೆ ಬಮ^{೨} + ಅಕ^{೨} = ಅಬ^{೨} + ಕಮ^{೨}, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೨. $\triangle$ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ $\angle$ ಕ ಕಾಟಕೋನವಿದೆ. ಕಅ, ಕಬ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯೋ ಮ, ನ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಅನ^{೨} + ಬಮ^{೨} = ಕಬ^{೨} + ಮನ^{೨}, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೩. $\triangle$ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಮ ಬಿಂದುವಿದೆ. ಮಪ, ಮಫ, ಮರ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಕ, ಕಅ, ಅಬ ಗಳ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಆದರೆ ಬಪ^{೨} + ಕಫ^{೨} + ಅರ^{೨} = ಕಪ^{೨} + ಅಫ^{೨} + ಬರ^{೨}, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಉದಾ. ೨ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

೧೪. ಅಬಕಡ ಆಯತದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಮ ಬಿಂದು ಇದೆ. ಆದರೆ ಮಅ^{೨} + ಮಕ^{೨} = ಮಬ^{೨} + ಮಡ^{೨}, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೫. ಅಬಕ ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಕ ಕರ್ಣದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ಇದೆ. ಆದರೆ ಪಬ^{೨} + ಪಕ^{೨} = ೨ಪಅ^{೨} ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೬. $\triangle$ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ ಬಈ $\perp$ ಅಕ ಮತ್ತು ಕಫ $\perp$ ಅಬ, ಬಮ $\perp$ ಈಫ ಮತ್ತು ಕನ $\perp$ ಈಫ. ಆದರೆ ಮಫ^{೨} + ನಫ^{೨} = ಮಈ^{೨} + ನಈ^{೨}, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೭. △ ಅಬಕದಲ್ಲಿ ∠ಅ ಲಂಬಕೋನವಿದೆ. ಬಈ, ಕಫ ಇವು ಆ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ೪(ಬಈ^{೨} + ಕಫ^{೨}) = ೫ಬಕ^{೨}, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೮. ಅಬಕ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. ಅಡ ⊥ ಬಕ; ಅಡ ರೇಖೆಯು △ ಅಬಕದಲ್ಲಿ ಬೀಳುವದು. ಬಡ × ಡಕ = ಅಡ^{೨} ಇದ್ದರೆ ∠ಬಅಕ ಇದು ಲಂಬಕೋನವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[ಬಕ^{೨} = (ಬಡ + ಡಕ)^{೨} = ಬಡ^{೨} + ಡಕ^{೨} + ೨ಬಡ × ಡಕ
= ಬಡ^{೨} + ಡಕ^{೨} + ೨ಅಡ^{೨} = (ಬಡ^{೨} + ಅಡ^{೨}) + (ಡಕ^{೨} + ಅಡ^{೨})
= ಅಬ^{೨} + ಅಕ^{೨}. ∴ ∠ಅ = ೧ ಲಂಬಕೋನ.]

೧೯. ಅಬಕಡ ಚೌರಸದಲ್ಲಿ ಅಬ, ಬಕ, ಕಡ, ಡಅ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ, ಫ, ರ, ಸ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಅಪ = ಬಫ = ಕರ = ಡಸ ಆಗಿವೆ. ಆದರೆ,
ಫಸ^{೨} = ೨(ಅಪ^{೨} + ಬಪ^{೨}) ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

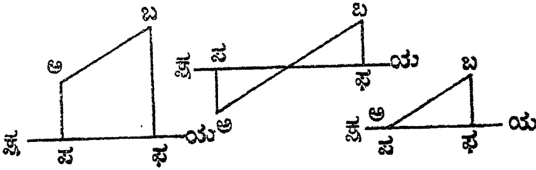
***೨೦.** ಮೇಲಿನ ೧೯ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪಫರಸ ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು **ಅಬಕಡ** ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ೫/೮ ದಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ, ಅಪ = ೧/೪ ಅಬ ಅಥವಾ ೩/೪ ಅಬ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

---

೨೦ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ಪಾಯ್‌ಥಾಗೋರಸ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ವಿಸ್ತಾರ

ವ್ಯಾಖ್ಯಾ: **ಅಬ** ಇದೊಂದು ರೇಖಾ-ಖಂಡವಿದೆ. ಇದರ **ಅ** ಮತ್ತು ಬ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ **ಅಬ**ಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರದ **ಕ್ಷಯ** ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ **ಅಪ, ಬಫ** ಲಂಬಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, **ಪಫ** ಇದಕ್ಕೆ **ಅಬ**ದ **ಕ್ಷಯ** ಮೇಲಿನ **ಪ್ರಕ್ಷೇಪ** ಅಥವಾ **ಅಭಿಕ್ಷೇಪ** ಅನ್ನುವರು.

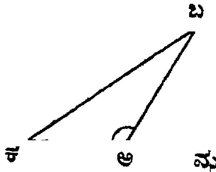


ಮೇಲಿನ ಮೂರೂ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ **ಪಫ** ಇದು **ಅಬ**ದ ಪ್ರಕ್ಷೇಪವಾಗಿದೆ. ಕೊನೆಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ **ಅ** ಮತ್ತು **ಪ** ಬಿಂದುಗಳು ಏಕತ್ರವಾಗಿವೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:— ಪಫದ ಉದ್ದಳತೆಯು, ಅಬದ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು **ಅಬ**ಕ್ಕೆ **ಕ್ಷಯ** ಕೂಡಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನ ಇವುಗಳ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಈ ಕೋನವು **ಟ** ಇದ್ದರೆ ಪ್ರಕ್ಷೇಪದ ಉದ್ದಳತೆಯು (ಅಬ × ಕೋಜ್ಯಾ ಟ) ದಷ್ಟು ಇರುವುದೆಂದು ಮುಂದೆ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯಿಂದ ತಿಳಿಯುವದು.

ಪ್ರಮೇಯ ೩೪.

ವಿಶಾಲ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, ವಿಶಾಲ ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸವು, ವಿಶಾಲ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು, ಅಧಿಕ ಆ ಎರಡು ಭುಜಗಳಲ್ಲೊಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ ಉಳಿದ ಭುಜದ ಪ್ರಕ್ಷೇಪ ಇವುಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಆಯತದ ಇಮ್ಮಡಿ, ಇವುಗಳಷ್ಟು ಇರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ∠ಅ ವಿಶಾಲ ಕೋನವಿದೆ.
ಅಮ ಇದು ಅಬದ ಕಅ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕ್ಷೇಪ.

ಸಾಧ್ಯ:— ಬಕ^2 = ಅಬ^2 + ಅಕ^2 + ೨ ಕಅ·ಅಮ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ∵ ∠ಬಮಕ = ೧ ಕಾಟಕೋನ

∴ ಬಕ^2 = ಬಮ^2 + ಕಮ^2 (ಪಾಯಥ್. ಸಿ.)

= ಬಮ^2 + (ಕಅ + ಅಮ)^2

= ಬಮ^2 + ಕಅ^2 + ಅಮ^2 + ೨ ಕಅ·ಅಮ

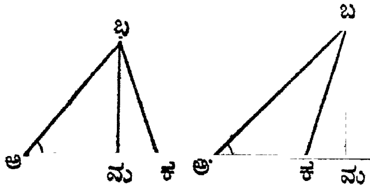
([೨] ಪುಟ ೩೨ ನೋಡಿರಿ.)

= (ಬಮ^2 + ಅಮ^2) + ಕಅ^2 + ೨ ಕಅ·ಅಮ

= ಅಬ^2 + ಕಅ^2 + ೨ ಕಅ·ಅಮ. (ಪಾಯಥ್. ಸಿ

ಪ್ರಮೇಯ ೩೫.

ಯಾವದೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಘುಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸವು, ಆ ಲಘುಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವ ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜಿನೊಳಗಿಂದ ಆ ಎರಡು ಭುಜಗಳಲ್ಲೊಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ ಉಳಿದ ಭುಜದ ಪ್ರಕ್ಷೇಪ ಇವುಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಆಯತದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಕಳೆದಷ್ಟು ಇರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\angle$ಅ ಲಘುಕೋನವಿದೆ. ಮತ್ತು ಅಮ ಇದು ಅಬದ ಅಕ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕ್ಷೇಪವಿದೆ. (ಅಂದರೆ ಬಮ $\perp$ ಅಕ)

ಸಾಧ್ಯ:— ಬಕ^2 = ಅಬ^2 + ಅಕ^2 − ೨ ಅಕ $\cdot$ ಅಮ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ಬಕ^2 = ಬಮ^2 + ಕಮ^2 (ಪಾಯಥ. ಸಿ.)

= ಬಮ^2 + (ಅಕ $\sim$ ಅಮ)^2

= ಬಮ^2 + ಅಕ^2 + ಅಮ^2 − ೨ ಅಕ $\cdot$ ಅಮ

= (ಬಮ^2 + ಅಮ^2) + ಅಕ^2 − ೨ ಅಕ $\cdot$ ಅಮ

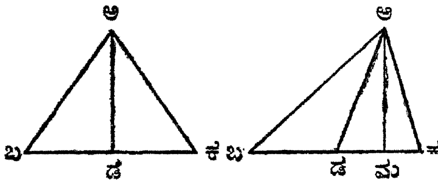
= ಅಬ^2 + ಅಕ^2 − ೨ ಅಕ $\cdot$ ಅಮ (ಪಾಯಥ. ಸಿ.)

ಪಾಯಥ್‌ಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನೂ, ಪ್ರಮೇಯ ೩೪ ಮತ್ತು ೩೫ ರಲ್ಲಿಯ ಅದರ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನೂ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಒಂದೇ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಸಮಾವೇಶ ಮಾಡಬಹುದು.

ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವದೇ ಒಂದು ಭುಜದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸವು, ಆ ಭುಜದ ಎದುರಿನ ವಿಶಾಲಕೋನ, ಕಾಟಕೋನ ಅಥವಾ ಲಘು ಕೋನ ಮಾಡುವ ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜುಗಳಿಂದ ದೊಡ್ಡದು, ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು, ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೀಜುಗಳಿಂದ ಸಣ್ಣದು ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ ಇರುವದು. ಅಸಮಾನತ್ವವಿದ್ದಾಗ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ದಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ಆ ಎರಡು ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿನ ಉಳಿದ ಭುಜದ ಪ್ರಕ್ಷೇಪ ಇವುಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಆಯತದ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇರುವದು.

ಪ್ರಮೇಯ ೩೬ (ಅಪೋಲೋನಿಯಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಯಾವದೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಬೇಕಾದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು, ಇದು ಮೂರನೆಯ ಭುಜದ ಅರ್ಧದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸದ ಇಮ್ಮಡಿ ಮತ್ತು ಆ ಮೂರನೆಯ ಭುಜದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸದ ಇಮ್ಮಡಿ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಅಡ ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಯಿದೆ.
(ಅಂದರೆ ಬಡ = ಡಕ).

ಸಾಧ್ಯ:— ಅಬ^2 + ಅಕ^2 = ೨ ಅಡ^2 + ೨ ಬಡ^2.

ಸಿದ್ಧತೆ:—ಅಡಬ, ಅಡಕ ಈ ಎರಡು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

ಒಂದು ವೇಳೆ (೧) ಎರಡೂ ಕಾಟಕೋನಗಳಾಗಿರಬಹುದು.

ಇಲ್ಲವೆ (೨) ಒಂದು ವಿಶಾಲಕೋನ, ಇನ್ನೊಂದು ಲಘುಕೋನ ವಿರಬೇಕು.

(೧ ರಂತೆ):—**ಅಬ**^{೨} = **ಅಡ**^{೨} + **ಬಡ**^{೨} (ಫಾಯಥ. ಸಿ.)

ಅಕ^{೨} = **ಅಡ**^{೨} + **ಡಕ**^{೨} (,, ,,)

= **ಅಡ**^{೨} + **ಬಡ**^{೨} ($\because$ **ಬಡ=ಡಕ**)

ಬೇರೀಜು ಮಾಡಲು, **ಅಬ**^{೨} + **ಅಕ**^{೨} = ೨ **ಅಡ**^{೨} + ೨ **ಬಡ**^{೨}.

(೨ ರಂತೆ):— $\angle$ **ಅಡಬ** ವಿಶಾಲಕೋನ ಮತ್ತು $\angle$ **ಅಡಕ** ಲಘು ಕೋನವೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. **ಬಕ** ದ ಮೇಲೆ **ಅಮ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಂದರೆ,

$\triangle$ **ಅಡಬ** ದಿಂದ **ಅಬ**^{೨} = **ಅಡ**^{೨} + **ಬಡ**^{೨} + ೨ **ಬಡ · ಡಮ**

$\triangle$ **ಅಡಕ** ,, **ಅಕ**^{೨} = **ಅಡ**^{೨} + **ಡಕ**^{೨} − ೨ **ಡಕ · ಡಮ**

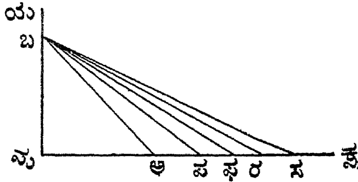
= **ಅಡ**^{೨} + **ಬಡ**^{೨} − ೨ **ಬಡ · ಡಮ**

ಬೇರೀಜು ಮಾಡಲು, **ಅಬ**^{೨} + **ಅಕ**^{೨} = ೨ **ಅಡ**^{೨} + ೨ **ಬಡ**^{೨}.

= ೨ **ಬಡ**^{೨} + ೨ **ಅಡ**^{೨}.

ಕೃತ್ಯ ೧೪.

ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\sqrt{೨}$, $\sqrt{೩}$, $\sqrt{೪}$, $\sqrt{೫}$........ ಏಕಾಂಕದ ಉದ್ದಳತೆಯ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.



ರಚನೆ ಮತ್ತು **ಸಿದ್ಧತೆ:-**

ಮಕ್ಷ, ಮಯ ಇವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಕಾಟಕೋನ ಮಾಡುವಂತೆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಮಕ್ಷ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ **ಮಅ** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ; ಮತ್ತು ಅದು ಏಕಾಂಕ ವೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿರಿ. ಇದರಷ್ಟೇ **ಮಯ** ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ **ಮಬ** ತುಂಡರಿಸಿರಿ; **ಅಬ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ, **ಅಬ**^{೨} = **ಮಅ**^{೨} + **ಮಬ**^{೨} = ೧^{೨} + ೧^{೨} = ೨

∴ **ಅಬ** = $\sqrt{೨}$ ಏಕಾಂಕ.

ಮಕ್ಷದಲ್ಲಿ **ಅಬ**ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ **ಮಪ** ತಕ್ಕೊಳ್ಳಿರಿ; **ಬಪ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ **ಬಪ**^{೨} = **ಮಪ**^{೨} + ಮಬ^{೨}

= **ಅಬ**^{೨} + **ಮಬ**^{೨} = ೨ + ೧ = ೩

∴ **ಬಪ** = $\sqrt{೩}$ ಏಕಾಂಕ.

ಮಕ್ಷದಲ್ಲಿ **ಬಪ**ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ **ಮಫ** ತಕ್ಕೊಳ್ಳಿರಿ; **ಬಫ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ **ಬಫ**^{೨} = **ಮಬ**^{೨} + **ಮಫ**^{೨}

= **ಮಬ**^{೨} + **ಬಪ**^{೨} = ೧ + ೩ = ೪

∴ **ಬಫ** = $\sqrt{೪}$ ಏಕಾಂಕ;

ಇದರಂತೆ $\sqrt{೫}$, $\sqrt{೬}$........ಏಕಾಂಕಗಳ ಉದ್ದಳತೆಯ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:—ಅ'^{2} + ಬ'^{2} = ಕ' ಇಂಥ ಅ' ಮತ್ತು ಬ' ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿರಿ. ಆಗ ಕಾಟಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ ಅ' ಮತ್ತು ಬ' ದಷ್ಟು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಅದರ ಕರ್ಣ ರೇಖೆಯು $\sqrt{\text{ಕ}'}$ ದಷ್ಟು ಆಗುವದು; ಮತ್ತು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\sqrt{\text{ಕ}}$ ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾಗಿ ತೆಗೆಯಬಹುದು.

ಉದಾ:—$\sqrt{\text{೪೧}}$ ಉದ್ದ ಗೆರೆ ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದರೆ: ೪^2 + ೫^2 = ೪೧. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಕಾಟಕೋನ ಮಾಡುವ ಭುಜಗಳು ೪ ಮತ್ತು ೫ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆಯಬಹುದು. ಇದರ ಕರ್ಣ $\sqrt{\text{೪೧}}$ ಇರುವದು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೨೦.

೧. ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳನ್ನು ಇಂಚಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಲಘುಕೋನ, ಕಾಟಕೋನ ಅಥವಾ ವಿಶಾಲಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಯಾವವೆಂಬ ವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

(೧) ೪ ಇ., ೫ ಇ., ೬ ಇ., (೨) ೬ ಇ., ೭ ಇ., ೯ ಇ., (೩) ೩.೪ ಇ., ೩ ಇ., ೧.೬ ಇ.; (೪) ಮ^2 + ೧ ಇ., ಮ^2 − ೧ ಇ., ೨ಮ ಇ.; (೫) ಮ^2 + ೧ ಇ., ಮ ಇಂಚು, ಮ^2 − ೧ ಇಂಚು.

೨. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಅಬ = ೪"; ಬಕ = ೫"; ಕಅ = ೬"; ಆದರೆ ಅಬ ದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕ್ಷೇಪವನ್ನು (Projection) ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಅಡ ⊥ ಬಕ ಮತ್ತು ಬಈ ⊥ ಅಕ, ಆದರೆ ಬಕ × ಕಡ = ಅಕ × ಕಈ, ಎಂಬದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಅಬ = ಅಕ ಮತ್ತು ಬಡ ⊥ ಅಕ, ಆದರೆ ಬಕ^2 = ೨ ಅಕ·ಕಡ, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ∠ಬ = ೬೦° ಆದರೆ,
ಅಕ^2 = ಅಬ^2 + ಬಕ^2 − ಅಬ. ಬಕ, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೬. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ∠ಬ = ೧೨೦° ಆದರೆ,
ಅಕ^2 = ಅಬ^2 + ಬಕ^2 + ಅಬ·ಬಕ, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೭. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ∠ಬ = ೪೫°, ಆದರೆ
ಅಕ^2 = ಅಬ^2 + ಬಕ^2 − $\sqrt{\text{೨}}$ಅಬ·ಬಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೮. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ∠ಕ = ೯೦° ಮತ್ತು ಬಕ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಡ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿದೆ. ಆದರೆ ಅಬ^2 = ಅಡ^2 + ೩ಬಡ^2, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೯. $\triangle$ಅಬಕದಲ್ಲಿ ಬ ಮತ್ತು ಕ ಲಘುಕೋನಗಳಿವೆ. ಬಈ $\perp$ ಅಕ, ಕಫ $\perp$ ಅಬ. ಆದರೆ ಬಕ^2 = ಬಅ·ಬಫ + ಕಅ·ಕಈ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೦. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಅಬ = ಅಕ ಮತ್ತು ಅಕ ಭುಜವನ್ನು ಡ ದ ವರೆಗೆ ಕಡ = ಅಕ ಆಗುವಂತೆ ಬೆಳಿಸಿದೆ. ಆದರೆ ಬಡ^2 = ೨ಬಕ^2 + ಅಕ^2 ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೧. ಉದಾ. ಸಂಗ್ರಹ ೧೯ರಲ್ಲಿ ೧೪ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು 'ಅಪೋಲೋನಿಯಸ'ನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೧೨. ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು, ಅದರ ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುವದು.

೧೩. ಚೌಕೋನದ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು, ಇದು ಅದರ ಎರಡೂ ಕರ್ಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸುಗಳು ಮತ್ತು ಆ ಕರ್ಣಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸದ ನಾಲ್ಕುಪಟ್ಟು ಕೂಡಿದಷ್ಟು ಇರುವದು.

೧೪. ಚೌಕೋನದ ನಾಲ್ಕೂ ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು, ಅದರ ಕರ್ಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ, ಅದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇರುವದು.

೧೫. ಅಬಕಡ ಆಯತದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಮ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆಯತದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಆದರೆ,
ಪಅ^2 + ಪಬ^2 + ಪಕ^2 + ಪಡ^2 = ಅಕ^2 + ೪ಮಪ^2, ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೧೬. ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಇದು, ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟಿಗೆ ಸರಿಯಿರುವದು.

೧೭. ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಇಮ್ಮಡಿ ಇದು, ಅದರ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸದ ಮೂರು ಪಟ್ಟಿಗೆ ಸರಿಯಿರುವದು.

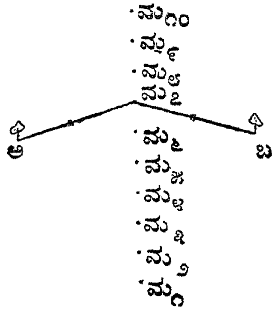
೧೮. $\triangle$ಅಬಕದ ಬಕ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ ಮತ್ತು ಫ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸರಿಯಾದ ಮೂರು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಆದರೆ,

ಅಬ^2 + ಅಕ^2 = ಅಪ^2 + ಅಫ^2 + ೪ಪಫ^2, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨೧ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ಬಿಂದುಪಥ

ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಒಂದು ಸರಳ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದಾನೆ ಅವನು ಮುಂದೆ ಮುಂದೆ ನಡೆದರೂ ಅವನ ಎಡಬಲದ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎರಡೂ ಗಿಡಗಳು ಅವನಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಉಳಿಯುವವು. ಆದರೆ ಅವನ ಮಾರ್ಗದ ಸಂಬಂಧವಲ್ಲಿ ನೀವು ಏನನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು?

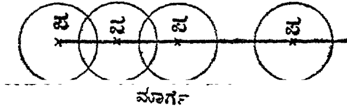


ಅ ಮತ್ತು **ಬ** ಬಿಂದುಗಳು ಗಿಡಗಳಿರುವ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವವು. ಮತ್ತು $ಮ_{೧}$, $ಮ_{೨}$, $ಮ_{೩}$ ....ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಅವನ ಸರಳ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವವು. ಇದರಿಂದ $ಮ_{೧}$, $ಮ_{೨}$........ಮೊದಲಾದ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು, **ಅ ಬ** ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಾಟಕೋನದಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ನೀವು ತಟ್ಟನೆ ಹೇಳಬಹುದು

ಗಿಡಗಳಿಂದ ತನ್ನ ಸಮಾನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಾಯ್ದುಕೊಳ್ಳುವ ನಿಯಮದಂತೆ ಯಾವ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಅವನು ಚಲಿಸುವನೋ ಆ ಮಾರ್ಗಕ್ಕೆ ಆ ಮನುಷ್ಯನ **ಬಿಂದುಪಥ** (Locus) ಎಂದು ಅನ್ನುವರು.

ಇನ್ನು ಒಂದು ಗಡಿಯಾರವನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ಮಿನೀಟು ಮುಳ್ಳಿನ ತುದಿಯು ಮಾರ್ಗಕ್ರಮಣದ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ. ಒಂದು ತಾಸಿನಲ್ಲಿ ಈ ತುದಿಯು ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ತುಳವನ್ನು ತಿರುಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಡಿಯಾರದ ಮಿನೀಟು ಮುಳ್ಳಿನ ತುದಿಯ ಬಿಂದುಪಥವು ಒಂದು ವರ್ತುಳವೆಂದು ನೀವು ಸಹಜವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಇದರಂತೆ ಗಡಿಯಾರದ ಸೆಕುಂದ ಮುಳ್ಳಿನ ತುದಿಯ ಬಿಂದುಪಥ ಯಾವದು? ಹೇಳಿರಿ.

ಒಬ್ಬ ಸೈಕಲ್ ಸವಾರನು ಒಂದು ಸರಳ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ. ಹಿಂದಿನ ಗಾಲಿಯ ನಾಭಿಯ (Hub) ಬಿಂದುಪಥ ಯಾವದು?



ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೇಲಿಂದ ನೀವು ಒಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು:—

ಯಾವದೊಂದು ಬಿಂದುವು, ಕೊಟ್ಟ ನಿಯಮಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಚಲಿಸುವಾಗ, ಆಕ್ರಮಣ ಮಾಡಿದ ಮಾರ್ಗಕ್ಕೆ ಅದರ ಬಿಂದುಪಥ (Locus) ಎಂದು ಅನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣೆ ಸಂಗ್ರಹ ೨೦.

ಕೆಳಗಿನ ೧ ರಿಂದ ೬ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧. ಗೂಟಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿದ ದಾರವನ್ನು ಜಗ್ಗಿ ತಿರುಗುವ ಕುದುರೆಯು.

೨. ಗಡಿಯಾರದ ಲಂಬಕದ ತುದಿಯು.

೩. ಜಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಚಕ್ರವನ್ನು ತಿರುಗಿಸುವಾಗ ಕಟ್ಟಿಗೆಯ ಕುದುರೆಯ ಮೇಲೆ ಕುಳಿತು ತಿರುಗುವ ಹುಡುಗನ ಮೂಗಿನ ತುದಿ.

೪. ಬಾಗಿಲು ತೆರೆಯುವಾಗ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಚಿಹ್ನಾಂಕಿತ ಬಿಂದು.

೫. ಲಿಫ್ಟಿನಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಇಳಿಯುವಾಗ ಅದರಲ್ಲಿ ಸ್ತಬ್ಧವಾಗಿ ನಿಂತವನ ತಲೆಯ ಅಗ್ರವು.

೬. ಮೇಜಿನ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಿರವಾಗಿಟ್ಟ ಫೂಟುಪಟ್ಟಿಯ ಅಂಚಿನಿಂದ ಉರುಳುತ್ತ ಹೋಗುವ ರೂಪಾಯಿಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು.

೭. ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಒಂದು ರೂಪಾಯಿಯ ನಾಣ್ಯವನ್ನಿಟ್ಟಿದೆ. ಅದರ ಸುತ್ತಲು ಅದರ ತುದಿಯ ಅಂಚಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುತ್ತ ಇನ್ನೊಂದು ರೂಪಾಯಿಯ ನಾಣ್ಯವು ತಿರುಗುತ್ತಿದೆ. ಆದರೆ ಆ ಎರಡನೆಯ ರೂಪಾಯಿಯ ಕೇಂದ್ರದ ಬಿಂದುಪಥ ಯಾವದು? ತಿರುಗುವ ರೂಪಾಯಿಯ ಪರಿಘದ ಮೇಲಿನ ಚಿಹ್ನಾಂಕಿತ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದೇನು?

೮. ಮಪ ಕೋಲು ತನ್ನ ಮ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಿರವಿಟ್ಟು, ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಮೈಸುತ್ತು ತಿರುಗುವದು. ಆದರೆ ಪ ದ ಬಿಂದುಪಥ ಯಾವದು? ಈ ಕೋಲಿನ ಪ ತುದಿಗೆ ಪಫ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಕೋಲನ್ನು ಬಿಜಾಗರದಿಂದ ಗಟ್ಟಿಯಾಗಿ ಕೂಡಿಸಿದೆ. ಮತ್ತು ಅದು ಎದುರು ತೂಗಾಡುತ್ತಿದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಫ ತುದಿಯ ಬಿಂದುಪಥವು ಯಾವದು?

೯. ಕ್ಷಿತಿಜಲಂಬ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಪಟ್ಟಿಯು ಒಂದು ಕಿರಿ ಅಂಚು ಮೇಜಿನ ಪೃಷ್ಠಭಾಗಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡಿದೆ. ಅದರ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಚಿಹ್ನಾಂಕಿತ ಬಿಂದು ಇದೆ. ಆ ತ್ರಿಕೋನ ಪಟ್ಟಿಯು ತನ್ನ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜದ ಸುತ್ತಲು ತಿರುಗುವಾಗ ಆಗುವ ಅದರ ಚಿಹ್ನಾಂಕಿತ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ಯಾವದು? ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೦. ಅಬ ಕೋಲಿನ ಅ ತುದಿಯು ಒಂದು ಮೇಜಿನ ಮಕ್ಷ ಅಂಚಿನ ಮೇಲಿದೆ. ಆ ಮೇಜಿನ ಇನ್ನೊಂದು ಮಯ ಅಂಚು ಮಕ್ಷ ಅಂಚಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದು, ಅಬ ಕೋಲಿನ ಬ ತುದಿಯು ಅದರೆಡೆಗೆ ನಡೆದಿದೆ. ಆದರೆ ಈ ಕೋಲಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಆ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಬಿಂದುಪಥವು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರಬಹುದು, ಇಲ್ಲವೆ ವಕ್ರ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರಬಹುದು. ಆಗ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಂಗತಿಗಳು ಗರ್ಭಿತವಾಗಿರುವವು:—

(೧) ಕೊಟ್ಟ ನಿಯಮವನ್ನು ಪೂರ್ಣಮಾಡುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವು, ಆ ಸರಳ ಇಲ್ಲವೆ ವಕ್ರರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವದು. (ಅಂದರೆ ಬಿಂದುಪಥದ ಹೊರಗಿನ ಯಾವದೇ ಬಿಂದುವಾಗಲಿ ಅದು ಕೊಟ್ಟ ನಿಯಮವನ್ನು ಪೂರೈಸಲಾರದು.)

(೨) ಸರಳ ಇಲ್ಲವೆ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವು ಕೊಟ್ಟ ನಿಯಮವನ್ನು ಪೂರೈಸುವದು.

ಹಲಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಕೊಡುವಾಗ, ಸರಳ ಇಲ್ಲವೆ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಕೆಲವೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕೊಡಬಹುದು. ಇಂಥ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವನ್ನು ಬಿಂದುಪಥದಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂಬದನ್ನು ಮೊದಲು ಸ್ಪಷ್ಟ ನಿರ್ದೇಶ ಮಾಡಬೇಕು. ಉದಾ:— ಮೇಲಿನ ೧೦ ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಅಬ ಕೋಲಿನಲ್ಲಿಯ ನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವು ಮೇಜಿನ ಮ ಮೂಲೆಯಿಂದ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದು.

ಸ್ನೇ ನ ದ ಬಿಂದುಪಥವು ವರ್ತುಳವೆಂದು ಹೇಳಲಾಗದು. ಯಾಕೆಂದರೆ, ಮೇಜಿನ ಮಕ್ಷ ಮತ್ತು ಮಯ ಅಂಚುಗಳ ನಡುವಿನ ಭಾಗ, ಅಂದರೆ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದ ೪ ಭಾಗವು ಮಾತ್ರ ನ ಇದರ ಬಿಂದುಪಥ ಆಗುವದು. ಇಂಥ ಬೇರೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಮುಂದೆ ನೋಡಬಹುದು.

ಯಾವದೇ ಪ್ರಶ್ನದಲ್ಲಿಯು ಬಿಂದುಪಥವನ್ನು ಹೇಳುವಾಗ ಕೊಟ್ಟ ನಿಯಮ ವನ್ನು ಪೂರೈಸುವ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ನಿಶ್ಚಯಿಸಬೇಕು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಬಿಂದುಪಥವು ಹೇಗಿರಬೇಕೆಂಬುದರ ಕಲ್ಪನೆಯು ನಿಮಗೆ ಹೊಳೆಯುವದು. ಬಿಂದುಪಥವು ಸರಳರೇಖಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ವಕ್ರರೇಖಾ ತ್ಮಕ ಇದ್ದರೆ, ಹಲವೆಡೆಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಮಾಡಿದ ಕಲ್ಪನೆಯು ಸರಿಯಾಗುವದು. ನಂತರ ಮಾಡಿದ ಕಲ್ಪನೆಯು ಸರಿಯಾಗಿರುವದೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಬೇಕು. ೨೧ ನೆಯ ಮತ್ತು ೨೨ ನೆಯ ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ಗಳಲ್ಲಿ ತರ್ಕಶುದ್ಧ ಸಿದ್ಧತೆಯ ಅಪೇಕ್ಷೆಯಿಲ್ಲ.

ತರ್ಕಶುದ್ಧ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಮೇಲೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಾಡಿದ [(೧) ಮತ್ತು (೨)] ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಒಂದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ ಬಿಡುವ ತಪ್ಪನ್ನು ಕೆಲವರು ಮಾಡುವದುಂಟು. ಇಂಥ ತಪ್ಪು ಆಗದಂತೆ ಎಚ್ಚರಪಡಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೨೨.

[೧ ರಿಂದ ೫ ಉದಾಹರಣಗಳಲ್ಲಿ ಆಲೇಖ–ಪತ್ರದ (Graph-paper) ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಬಿಂದುಪಥ ಹೇಳಿರಿ.

೧. ಮಕ್ಷ ರೇಖೆಯಿಂದ ಇರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಂತರವು, ಮಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬ ವಾಗಿರುವ ಮಯ ರೇಖೆಯಿಂದ ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇದರ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೨. ಮಕ್ಷ, ಮಯ ಇವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವವು. ಈ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಇರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಂತರಗಳ ಬೇರೀಜು ೫ ಇಂಚು ಇದೆ. ಆದರೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩. ಮಕ್ಷ, ಮಯ ಇವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವವು. ಈ ರೇಖೆಗಳಿಂದ

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಂತರಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ ೨ ಇಂಚು ಇದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೪. ಕೊಟ್ಟ ಮಕ್ಷ ರೇಖೆಯಿಂದ ಯಾವಾಗಲೂ ೨ ಇಂಚು ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೫. ಮಕ್ಷ, ಮಯ ಇವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಈ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಇರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಂತರಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸುಗಳ ಬೇರೀಜು ೨೫ ಚೌ. ಇಂಚು ಇದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೬. ಮ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ೫ ಇಂಚು ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಈ ವರ್ತುಳಪರಿಘದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಅದು ಅದರಲ್ಲಿ ತಿರುಗುವದು. ಮಪ ರೇಖೆಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವ ಫ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

*೭. ಅಬಕಡ ಚೌರಸದ ಒಂದೇ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿ ಪ ಬಿಂದುವನ್ನು ∠ ಅಪಬ = ∠ ಅಪಡ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಆದರೆ ಪ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ಯಾವದು? [ಕರ್ಣದ ವಿಷಯ ವಿಚಾರಿಸಿರಿ].

*೮. ಅಬ ನಿಯತ ರೇಖೆಯನ್ನೂ, ಸ ನಿಯತ ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿವೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಪ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಬ ದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬಾಂತರವು ಸಪ ದಷ್ಟು ಇರುವದು. ಆದರೆ ಪ ಬಿಂದುವಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಿತಿಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಪ ದ ಬಿಂದುಪಥ ಆಗುವದು. [ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ **ಪರವಲಯ** (Parabola) ಅನ್ನುವರು. ಸ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಅದರ **ನಾಭಿ** (Focus) ಮತ್ತು ಅಬ ರೇಖೆಗೆ **ನಿಯಾಮಕ ರೇಖೆ** (Directrix) ಅನ್ನುವರು.]

*೯. ಅ ಮತ್ತು ಬ ನಿಯತ ಬಿಂದುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ೩ ಇಂಚು ಅಂತರದಲ್ಲಿವೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಪ ಬಿಂದುವು ಪಅ + ಪಬ = ೪ ಇಂಚು ಆಗುವ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿದೆ. ಆದರೆ ಪ ಬಿಂದುವಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಾನಗಳ ದರ್ಶಕ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಪ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ಆಗುವದು. [ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ **ದೀರ್ಘವರ್ತುಳ** (Ellipse) ಅನ್ನುವರು. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಇವುಗಳಿಗೆ ನಾಭಿ ಅನ್ನುವರು. ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ತೆಗೆಯಬಹುದು:—ಅ ಮತ್ತು ಬ ಎರಡು ಗುಂಡುಸೂಜಿಗಳನ್ನು ಮೂರು ಇಂಚು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ನಾಲ್ಕು ಇಂಚಿನ ದಾರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ತುದಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅದನ್ನು ಅ, ಬ ಸೂಜಿಗಳ ಮೇಲಿಟ್ಟು, ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ತುದಿಯಿಂದ ಆ ದಾರವನ್ನು ಜಗ್ಗಿ ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪೆನ್ಸಿಲನ್ನು ಸುತ್ತುವರಿದು ತಿರುವಿರಿ. ಅದು ದೀರ್ಘವರ್ತುಲವಾಗುವದು. ಅಂದರೆ ಅದು ಇಷ್ಟ ಬಿಂದುಪಥ ಆಗುವದು.]

ಪ್ರಮೇಯ ೩೭.

ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವು, ಕೊಟ್ಟ ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಸರಳ ರೇಷೆಯ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇರುವದು.

ಅ, ಬ ಇವೆರಡು ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳು; **ಮ** ಇದು **ಅಬ**ದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು; ಮತ್ತು **ಕ್ಷಮಯ** ರೇಷೆಯು **ಅಬ**ದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಿದೆ.

[೧] **ಪ್ರಥಮ ಭಾಗ:**

ಪಕ್ಷ:—ಪಅ = ಪಬ ಆಗುವಂತೆ **ಪ** ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:—ಪ ಬಿಂದುವು **ಕ್ಷಯ** ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದಲ್ಲಿದೆ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಪಮುಅ, ಪಮುಬ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ

{ **ಪಅ** = **ಪಬ** (ಪಕ್ಷ)
ಅಮು = **ಬಮು** (∵ **ಮು** ಇದು **ಅಬ** ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು)
ಪಮು = **ಪಮು** (ಸಾಧಾರಣ).

∴ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಆಗಿವೆ.

∴ ∠ **ಪಮುಅ** = ∠ **ಪಮುಬ**

∴ **ಪಮು** ಇದು **ಅಬ**ದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಿದೆ.

ಪರಂತು, **ಕ್ಷಮು** ಇದು **ಅಬ** ದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಿದೆ, ಮತ್ತು **ಮು** ದಿಂದ ಇಂಥ ಒಂದೇ ಲಂಬವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಶಕ್ಯವಿದೆ.

∴ **ಪಮು**, **ಕ್ಷಮು** ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿವೆ.

ಅಂದರೆ, **ಪ** ಬಿಂದುವು **ಅಬ** ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವಾದ **ಕ್ಷಯು** ರೇಖೆಯಲ್ಲಿದೆ.

[೨] **ಎರಡನೆಯ ಭಾಗ:**

ಪಕ್ಷ:— ಅಬ ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವಾದ **ಕ್ಷಮುಯ** ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು **ಪ** ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— **ಪಅ** = **ಪಬ** ಎಂದು ತೋರಿಸುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಪಮುಅ, ಪಮುಬ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

{ ಪಮು = **ಪಮು** (ಸಾಧಾರಣ)
ಅಮು = **ಬಮು** (∵ **ಮು** ಇದು **ಅಬ** ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು)
∠ **ಪಮುಅ** = ∠ **ಪಮುಬ** (∵ **ಪಮು** ⊥ **ಅಬ**)

∴ ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಆಗಿವೆ.

∴ **ಪಅ** = **ಪಬ**.

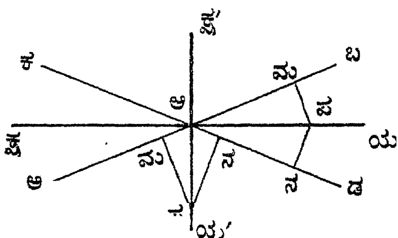
[೧] ನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ "**ಅ, ಬ** ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವು **ಅಬ**ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವವು" ಎಂಬದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದೆ.

ಮತ್ತು [೨]ನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ "ಅಬ ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವು, ಅ ಮತ್ತು ಬ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವದು" ಎಂಬದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದೆ.

ಇದರಿಂದ, ಅ, ಬ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವು, ಅಬ ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕವಾದ **ಕ್ಷಯ** ಆಗಿರುವದು ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದಂತಾಯಿತು.

ಪ್ರಮೇಯ ೩೮.

ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ರೇಷೆಗಳಿಂದ, ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವು, ಆ ಎರಡು ರೇಷೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವ ರೇಷೆಗಳ ಜೋಡು ಆಗುವದು.



ಅಬ, ಕಡ ಇವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು; ಮತ್ತು **ಕ್ಷಆಯ, ಕ್ಷ'ಆಯ'** ರೇಷೆಗಳು, ಆ ಛೇದಕ ರೇಷೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳಾಗಿವೆ.

[೧] **ಪ್ರಥಮ ಭಾಗ:—**

ಪಕ್ಷ:— **ಅಬ, ಕಡ** ರೇಷೆಗಳ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ, **ಪಮ, ಪನ** ಲಂಬಗಳು ಸಮಾನ ಆಗುವಂತೆ **ಪ** ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— **ಕ್ಷಯ** ಅಥವಾ **ಕ್ಷ'ಯ'** ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಮೇಲೆ **ಪ** ಬಿಂದು ಇರುವದು.

ಅಂದರೆ, ∠ **ಪಆಮ** = ∠ **ಪಆನ**, ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಸಿದ್ಧತೆ:—**ಪಮಆ, ಪನಆ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ

∠ **ಪಮಆ,** ∠ **ಪನಆ** ಕಾಟಕೋನಗಳಿವೆ.
ಪಆ ಕರ್ಣವು ಸಾಧಾರಣವಿದೆ.
ಪಮ = **ಪನ** (ಪಕ್ಷ)

∴ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಆಗಿವೆ.

∴ ∠ **ಪಆಮ** = ∠ **ಪಆನ.**

[೨] **ಎರಡನೆಯ ಭಾಗ :**—

ಪಕ್ಷ:— **ಪ** ಬಿಂದುವು **ಕ್ಷಆಯ** ಅಥವಾ **ಕ್ಷ'ಆಯ'** ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯಲ್ಲಿದೆ; ಮತ್ತು **ಪಮ** ⊥ **ಅಬ, ಪನ** ⊥ **ಕಡ.**

ಸಾಧ್ಯ:— **ಪಮ** = **ಪನ.**

ಸಿದ್ಧತೆ:—**ಪಮಆ, ಪನಆ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ

∠ **ಪಮಆ** = ∠ **ಪನಆ** (ಕಾಟಕೋನ)
∠ **ಪಆಮ** = ∠ **ಪಆನ** (ಪಕ್ಷ)
ಪಆ = **ಪಆ** (ಸಾಧಾರಣ)

∴ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಆಗಿವೆ.

∴ **ಪಮ** = **ಪನ.**

[೧] ಮತ್ತು [೨] ಭಾಗಗಳಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಜೋಡು ಇದು ಇಷ್ಟ ಬಿಂದುಪಥವು ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದು.

ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಪಥಗಳು ಮಹತ್ವವುಳ್ಳವು:—

೧. ಒಂದು ಸರಳ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವು (ಆ ಪಾತಳಿಯ ಮೇಲೆ) ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಆಗುವದು.

೨. ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವು, ಆ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಆ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಮಧ್ಯ ರೇಖೆ ಆಗುವದು.

೩. ಪಾತಳಿಯ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವು, ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿಯ ಅಂಥ ರೇಖೆ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಆಗುವವು.

* ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೨೩.

೧. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳು; ∠ ಅಪಬ = ೧ ಕಾಟಕೋನ ಆಗುವಂತೆ ಪ ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದರೆ ಅಬ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವರ್ತುಳವು ಪ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಕೊಟ್ಟ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಆದರ ಕರ್ಣಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ. [ಉದಾ. ೧ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

೩. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಇವು ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳು. ಕ ಇದು ಅಬದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು. ಪಅ^{2} + ಪಬ^{2} ಈ ಬೇರೀಜು ನಿಯತವಿದ್ದ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಪ ಬಿಂದುವಿದೆ. ಆದರೆ ಕ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೆಗೆದ ವರ್ತುಳವು ಪ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ಆಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

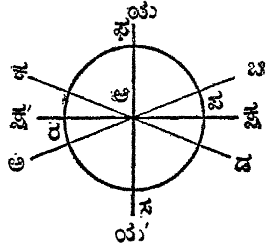
೪. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳು. ಪ ಬಿಂದುವು ಪಅ^{2} − ಪಬ^{2} ಇವುಗಳ ನಿಯತ ವಜಾ ಬಾಕಿಯ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿದೆ. ಆದರೆ ಪ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೫. ಒಂದು ಆಯತದ ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜಗಳು ೮ ಫೂಟು ಮತ್ತು ೬ ಫೂಟು ಇರುವವು. ಆದರ ಹೊರ ಅಂಚಿನ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಇಂಚು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳವು ತಿರುಗುತ್ತಲಿದೆ. ಆದರೆ ಆದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಬಿಂದುಪಥಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು.

ಒಂದು ಚಲಬಿಂದುವಿಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸುವದಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾರೆ ಒಂದೊಂದು ನಿಯಮವನ್ನು ಪೂರೈಸುವ ಬಿಂದುಪಥಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಪಥಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವ ಛೇದನಬಿಂದುವು ಕೊಟ್ಟ ಎರಡೂ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸುವದು.

ಉದಾ:— **ಅಬ, ಕಡ** ರೇಖೆಗಳು **ಆ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಈ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರ ಮೇಲೆ ಇರುವ, ಮತ್ತು **ಆ** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ೧·೧ . ಮಿ. ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಪ ಬಿಂದುವು **ಅಬ** ಮತ್ತು **ಕಡ** ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವದೆಂಬ ಒಂದೇ ನಿಯಮವನ್ನು ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. **ಪ** ದ ಬಿಂದುಪಥವು, **ಅಬ, ಕಡ** ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳಾದ **ಕ್ಷ'ಆಕ್ಷ', ಯಆಯ'** ರೇಖೆಗಳಾಗಿರುವದು.

ಪ ಬಿಂದುವಿನ **ಆ** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಂತರವು ೧·೧ ಸೆ. ಮಿ. ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ನಿಯಮವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. **ಆ** ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ೧·೧ ಸೆ. ಮಿ. ತ್ರಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದ ವರ್ತುಳವು **ಪ** ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ಆಗುವದು.

ಈ ಎರಡೂ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸಲಿಕ್ಕೆ, ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಅಂದರೆ **ಪ, ಫ, ರ** ಮತ್ತು **ಸ** ಈ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಇಷ್ಟ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೨೪.

೧. ಅಬ ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ನಿಯತ ರೇಖೆಯಿದೆ. △ ಪಅಬ ದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ನಿಯತವಿರುವಂತೆ ಪ ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದರೆ ಪ ದ ಬಿಂದುಪಥವು, ಅಬ ದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಬ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿರುವದು. (ಪ್ರ. ೩೦ ರ ಉಪ ಸಿ. ೧ ನೋಡಿರಿ).

೨. ಅಬ ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ನಿಯತ ರೇಖೆಯಿದೆ. ಅಬ ದಿಂದ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಅಳೆದುಕೊಟ್ಟ ಅಂತರವು ನಿಯತವಿರುವಂತೆ ಪ ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅಬ ದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಬ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳು ಪ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಕೊಟ್ಟ ಅಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮ ಮತ್ತು ನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರ ದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಇದು ಯಾವಾಗ ಅಶಕ್ಯ ಆಗುವದು?

೪. ಅಬ ದಲ್ಲಿ ಮ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ೩ ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆ ಯನ್ನು ವಿಚಾರಿಸಿರಿ.

೫. ಅಬ ದಲ್ಲಿ ಮ ಬಿಂದುವನ್ನೂ, ಅಕ ದಲ್ಲಿ ನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿವೆ. ಮ, ನ ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅಬ, ಅಕ ಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೬. ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವವು. ಆ ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.

೭. ಕೊಟ್ಟ ಅ, ಬ, ಕ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ. ಇದು ಯಾವಾಗ ಅಶಕ್ಯವಾಗುವದು ?

೮. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಎರಡೂ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ ಬೆಳಿಸಿವೆ. ಆ ಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರಗಳ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಇಂಥ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೯. ಅಬ, ಅಕ ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರಗಳ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಇನ್ನೊಂದು ಮನ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ. ಇದುಯಾವಾಗ ಅಶಕ್ಯವಾಗುವದು ?

೧೦. ಅಬ ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಯಿದೆ. ಅದರ ಹೊರಗೆ ನ ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಮ ಬಿಂದುವು ಅಬ ದ ಮೇಲೆ ತಿರುಗುತ್ತಿರುವದು. ನಮ ದಲ್ಲಿ ಪ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ. ಆದರೆ ಪ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೧. ಅಬ, ಕಡ ಇವು ಕೊಟ್ಟ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು. ಕ್ಷ ಇದೊಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು. ಕ್ಷದಿಂದ ಒಂದು ರೇಖೆ ತೆಗೆದಿದೆ. ಅದು ಅಬ ಇದನ್ನು ಮ ದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಕಡಇದನ್ನು ನ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಮನ ದಲ್ಲಿ ಪ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆ. ಆದರೆ ಪ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೨. ಅಕ್ಷ, ಅಯ ಕೋಲುಗಳು ಕಾಟಕೋನದಲ್ಲಿವೆ. ಮನ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಕೋಲನ್ನು ಅದರ ಮ ತುದಿಯು ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ನ ತುದಿಯು ಅಯಕ್ಕೆ ತಾಗುವಂತೆ ಕಟ್ಟಿದೆ. ಮನದಲ್ಲಿ ಪ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆ. ಆದರೆ ಪ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

[ಅಮಘನ ಆಯತವನ್ನು ಪೂರ್ಣಮಾಡಿ ಘ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.]

೧೩. ಪಅಬ ಇದೊಂದು ನಿಯತ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವುಳ್ಳ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಅಬ ಇದು ನಿಯತ ತಳರೇಖೆಯಿದೆ. ಅಬದಲ್ಲಿ ಮ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆ. ಆದರೆ ಮಪ ದಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(೧ ಮತ್ತು ೧೦ ಉದಾ.ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.)

೧೪. ಅಬ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಯತ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವುಳ್ಳ ಅಬಕಡ ಸಮಾ. ಭು. ಚೌ. ಇದೆ. ಆದರ ಕರ್ಣಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೫. ಎರಡು ಮಾರ್ಗಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಾರ್ಗದ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಮನೆಗಳಿವೆ. ಎರಡೂ ಮಾರ್ಗಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಮನೆಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಾವಿಯನ್ನು ತೋಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಬಾವಿಯನ್ನು ಆಗಿಯುವ ಸ್ಥಳವನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಮುಂಬಯಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ]

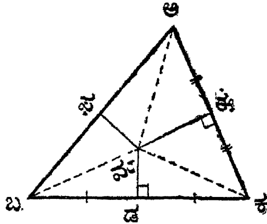
೨೨ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ.

ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಏಕಾಗ್ರತೆಯು

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:— ಮೂರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡಿದರೆ, ಅವು **ಏಕಾಗ್ರ** (Concurrent) ಆಗಿರುವವೆಂದು ಹೇಳುವರು. ಆ ಎಲ್ಲ ರೇಖೆಗಳು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವವೋ ಆ ಬಿಂದುವಿಗೆ **ಏಕಾಗ್ರಬಿಂದು** (Point of concurrence) ಅನ್ನುವರು.

ಪ್ರಮೇಯ ೩೯.

ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಏಕಾಗ್ರ ಇರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದ **ಬಕ, ಕಅ** ಈ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು **ಮ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು. **ಅಬ** ದಲ್ಲಿ **ಫ** ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆ. [**ಮಫ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.]

ಸಾಧ್ಯ:— **ಅಬ** ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವು **ಮ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು.

ರಚನೆ:— **ಮಅ, ಮಬ, ಮಕ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಮ** ಬಿಂದುವು **ಬಕ** ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಅದು **ಬ** ಮತ್ತು **ಕ** ದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥದ ಮೇಲಿದೆ.

∴ **ಮಬ = ಮಕ.**

ಆದರಂತೆ, **ಮಕ = ಮಅ**

∴ **ಮಅ = ಮಬ**

∴ **ಮ** ಇದು **ಅ, ಬ** ದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವು.

∴ **ಮ** ಇದು **ಅಬ** ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿದೆ.

∴ **ಮಫ** ಇದು **ಅಬ** ದ ದ್ವಿಭಾಜಕವಿದೆ.

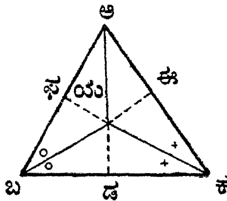
∴ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು **ಮ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೧ :— ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಏಕಾಗ್ರ ಬಿಂದುವು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:—ಮ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ **ಅಮ** ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ಅ, ಬ,** ಕ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು; ಈ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತ ಅನ್ನುವರು; ಮತ್ತು ಮ ಬಿಂದುವಿಗೆ **ಪರಿಮಧ್ಯ** ಅನ್ನುವರು.

ಪ್ರಮೇಯ ೪೦.

ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಏಕಾಗ್ರ ಇರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯ ∠ **ಬ** ಮತ್ತು ∠ **ಕ** ಇವುಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು **ಯ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡಿರುವವು.

ಸಾಧ್ಯ:— ∠ ಅ ಇದರ ದ್ವಿಭಾಜಕವು **ಯ** ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು.

ರಚನೆ:—ಅಯ ಕೂಡಿಸಿರಿ. **ಯಡ** ⊥ **ಬಕ, ಯಈ** ⊥ **ಕಅ, ಯಫ** ⊥ ಅಬ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:—ಯ ಬಿಂದುವು ∠ **ಬ** ಇವರ ದ್ವಿಭಾಜಕದಲ್ಲಿದೆ. (ಅಂದರೆ **ಅಬ, ಬಕ** ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥದ ಮೇಲಿದೆ.)

∴ **ಯಡ = ಯಫ**

ಅದರಂತೆ, **ಯಡ = ಯಈ**

∴ **ಯಈ = ಯಫ**

∴ **ಯ** ಬಿಂದುವು **ಅಬ, ಅಕ** ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥದ ಮೇಲಿದೆ.

∴ **ಅಯ** ಇದು ∠ ಅ ದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು.

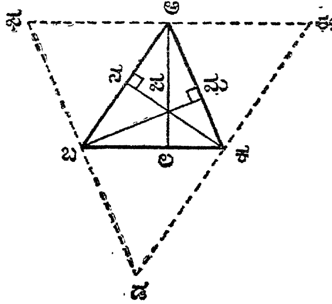
∴ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು **ಯ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏಕಾಗ್ರ ಆಗುವವು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ:—ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಏಕಾಗ್ರ ಬಿಂದುವು, ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವದು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:— ಯ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಯಡ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ತೆಗೆದ ವರ್ತುಳವು **ಬಕ, ಕಅ, ಅಬ** ಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ **ಡ, ಈ, ಫ** ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು. ಈ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ತ್ರಿಕೋನದ **ಅಂತರ್ವೃತ್ತ** ಮತ್ತು ಯ ಬಿಂದುವಿಗೆ **ಅಂತರ್ಮಧ್ಯ** ಅನ್ನುವರು.

ಪ್ರಮೇಯ ೪೧.

ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಅವುಗಳ ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬಗಳು ಏಕಾಗ್ರ ಇರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. **ಅಲ, ಬಮ, ಕನ** ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಬಕ, ಕಅ, ಅಬ** ಗಳ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ಆಗಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— **ಅಲ, ಬಮ, ಕನ** ಇವು ಏಕಾಗ್ರ ಇರುವವು.

ರಚನೆ:— **ಅ, ಬ, ಕ** ಗಳಿಂದ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಬಕ, ಕಅ, ಅಬ** ಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ **ಡಈಫ** ಎಂದು ಕರೆಯಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಫಅ** || **ಬಕ** ಮತ್ತು **ಫಬ** || **ಅಕ**

∴ **ಫಬಕಅ** ಇದೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ; ಮತ್ತು **ಫಅ** = **ಬಕ**; ಅದರಂತೆ, **ಅಈ** = **ಬಕ.**

∴ **ಫಅ** = **ಅಈ,** ಅಥವಾ ಅ ಇದು **ಫಈ** ರೇಷೆಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿದೆ.

ಪುನಃ **ಅಲ** ⊥ **ಬಕ** ಮತ್ತು **ಈಫ** || **ಬಕ**

∴ **ಅಲ** ⊥ **ಈಫ** ಅಂದರೆ **ಅಲ** ಇದು **ಈಫ** ದ ಲಂಬ

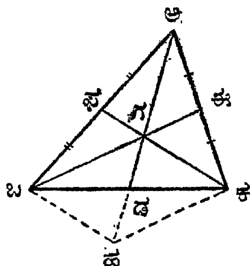
ದ್ವಿಭಾಜಕವಿದೆ. ಅದರಂತೆ, **ಬಮ, ಕನ** ಇವು ಅನುಕ್ರಮ
ವಾಗಿ **ಫಡ, ಡಈ** ಗಳ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಇರುವವು.

∴ **ಅಲ, ಬಮ, ಕನ** ಇವು △ **ಡಈಫ** ದ ಭುಜಗಳ ಲಂಬ
ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳಿರುವದರಿಂದ ಅವು ಏಕಾಗ್ರ ಇರುವವು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:—ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರಗಳ ಏಕಾಗ್ರ ಬಿಂದುವಿಗೆ **ಲಂಬಸಂಪಾತ** ಅಥವಾ **ಲಂಬಕೇಂದ್ರ** ಅನ್ನುವರು.

ಪ್ರಮೇಯ ೪೨.

ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಳು ಏಕಾಗ್ರ ಇರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದ **ಅಕ, ಅಬ** ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ **ಈ, ಫ** ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. **ಬಈ, ಕಫ** ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು **ಗ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವವು.

ಅಗ ಕೂಡಿಸಿ ಬೆಳಿಸಿದರೆ, **ಬಕ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಡ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಸಾಧ್ಯ:— **ಡ** ಬಿಂದುವು **ಬಕ** ದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ **ಅಡ** ಇದು ಮಧ್ಯರೇಖೆ ಇದೆ.

ರಚನೆ:—**ಗಹ = ಅಗ** ಆಗುವಂತೆ **ಅಗ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಹ** ಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗೆ ಬೆಳಿಸಿರಿ. **ಬಹ, ಕಹ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:—△ **ಅಬಹ** ದ **ಅಬ, ಅಹ** ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ **ಫ, ಗ** ಇವು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ.

∴ **ಫಗ || ಬಹ** ಅಂದರೆ **ಗಕ || ಬಹ.** ಅದರಂತೆ,

△ **ಅಕಹ** ದ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿ ನಾವು **ಗಬ || ಕಹ** ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

∵ **ಬಹಕಗ** ಇದು ಸಮಾ. ಭು. ಚೌಕೋನ ಇರುವದು.

∴ ಅದರ ಕರ್ಣ **ಬಕ, ಗಹ** ಇವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವವು.

∴ **ಡ** ಇದು **ಬಕ** ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಗುವದು. ಅಂದರೆ **ಅಡ** ಇದು ಮಧ್ಯರೇಷೆ ಇದ್ದು, **ಗ** ದಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವದು.

∴ **ಅಡ, ಬಈ, ಕಫ** ಮಧ್ಯ ರೇಷೆಗಳು **ಗ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏಕಾಗ್ರ ಆಗುವವು.

ಉಪಸಿ.—ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ **ಗಡ** = ⅓ **ಅಡ, ಗಈ** = ⅓ **ಬಈ,**
ಗಫ = ⅓ **ಕಫ.**

ಸಿದ್ಧತೆ:—**ಬಗಕಹ** ಇದು ಸಮಾ. ಭು. ಚೌಕೋನ ಇದೆ.

∴ **ಗಡ** = **ಡಹ** ∴ **ಗಹ** = ೨ **ಗಡ,**

ಪರಂತು, **ಅಗ** = **ಗಹ** ∴ **ಅಗ** = ೨ **ಗಡ**

∴ **ಗಡ** = ⅓ **ಅಡ.** ಪುನಃ **ಫಗ** = ½ **ಬಹ** = ½ **ಗಕ**

∴ **ಗಫ** = ⅓ **ಕಫ.** ಅದರಂತೆ, **ಗಈ** = ⅓ **ಬಈ.**

ಪ್ರಮೇಯ ೪೨ ಮತ್ತು ಅದರ ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ಇವುಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಕಾರವು:—

ಬಈ, ಕಫ ರೇಷೆಗಳು **ಗ** ದಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವವು. **ಕಫ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಬಈ, ಕಫ ಗಳಲ್ಲಿ **ಮ, ನ** ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತಿಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ; **ಮ, ನ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ **ಈಫ** = ½ **ಬಕ** = **ಮನ;** ಮತ್ತು **ಈಫ || ಬಕ || ಮನ**

∴ **ಈಫಮನ** ಸಮಾ. ಭು. ಚೌಕೋನ ಇದೆ.

∴ **ಮಗ** = **ಗಈ** ; **ನಗ** = **ಗಫ**

∴ **ಗಈ** = ⅓ **ಬಈ; ಗಫ** = ⅓ **ಕಫ.**

ಆದರಂತೆ, **ಅಡ, ಈಬ** ಇವು ಒಂದನ್ನೊಂದು **ಗ′**ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ **ಗ′ಈ** $= \frac{೨}{೩}$ **ಬಈ, ಗ′ಡ** $= \frac{೨}{೩}$ **ಅಡ** ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಪರಂತು, **ಗಈ** $= \frac{೨}{೩}$ **ಬಈ = ಗ′ಈ** $\quad\therefore$ **ಗ, ಗ′** ಏಕರೂಪ ಆಗಿವೆ.

$\therefore$ **ಅಡ, ಬಈ, ಕಫ** ಇವು **ಗ**ದಲ್ಲಿ ಏಕಾಗ್ರ ಆಗುವವು ಮತ್ತು **ಗ**ದಲ್ಲಿ ಅದರ ೨:೧ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಭಾಗ ಬೀಳುವವು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:— ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಏಕಾಗ್ರ ಬಿಂದುವಿಗೆ **ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ** ಅಥವಾ **ಮಧ್ಯಸಂಪಾತ** ಅನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೨೫.

೧. ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮೂರನೆಯ ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಪ್ರಮೇಯ ೪೨ ರ ಆಕೃತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

(೧) ಅಬ + ಅಕ > ೨ ಅಡ.

(೨) ಅಡ + ಬಈ > $\frac{೩}{೨}$ ಅಬ.

(೩) ಗ ಇದು $\triangle$ ಡಈಫದ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ.

(೪) $ಗ_{೧}$ ಇದು $\triangle$ ಅಈಫದ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರವಿದ್ದರೆ, $ಗಈಗ_{೧}ಫ$ ಇದು ಸಮಾ. ಭು. ಚೌಕೋನ ಆಗುವದು.

(೫) $ಗ_{೧}$, $ಗ_{೨}$, $ಗ_{೩}$ ಇವು $\triangle$ಅಈಫ, $\triangle$ಬಡಫ, $\triangle$ಕಡಈ ಇವುಗಳ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರಗಳು. ಆದರೆ ಗ ಇದು $\triangle ಗ_{೧}ಗ_{೨}ಗ_{೩}$ ಇದರ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಯಾವದೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ
ಪರಿಮಿತಿ > ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಳ ಬೇರೀಜು > $\frac{೩}{೪}$ ಪರಿಮಿತಿ ಇರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದೊಳಗಿಂದ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಯು, ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಣ್ಣದಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಮಧ್ಯ ರೇಷೆಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಆಗಿರುವದು.

೬. ಅಬಕಡ ಸಮಾ. ಭು. ಚೌಕೋನದ ಅಬ, ಅಡ, ಬಕ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಷ, ಯ, ಝ ಇರುವವು. ಅದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

(೧) ಡಕ್ಷ, ಬಯ ರೇಷೆಗಳು ಅಕ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು.

(೨) ಡಕ್ಷ, ಡಝ ರೇಷೆಗಳು ಅಕ ದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವವು.

[ಡಕ್ಷ, ಬಯ ಇವು △ ಅಬಡ ದ ಮಧ್ಯ ರೇಷೆಗಳು.]

೭. △ ಅಬಕ ಇದು ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಬಕ, ಕಅ, ಅಬ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಡ, ಈ, ಫ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಮ ಪರಿಮಧ್ಯವಿದೆ. ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ: —

(೧) ∠ ಬಮಕ = ೨ ∠ ಅ ಮತ್ತು ∠ ಮಬಕ = ೯೦° − ∠ ಅ.

(೨) ಬೆಳಿಸಿದ ಅಮ ರೇಷೆಯು ಬಕ ಕ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಲಘುಕೋನವು ೯೦° − (∠ ಬ ಲ ∠ ಕ) ದಷ್ಟು ಇರುವದು.

(೩) ಅಬ = ಅಕ ಇದ್ದರೆ, ಮ ಬಿಂದುವು ಅಡ ದಲ್ಲಿರುವದು.

(೪) ಪ, ಫ, ರ ಇವು △ ಬಮಕ, △ ಕಮಅ, △ ಅಮಬ ಇವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪರಿಮಧ್ಯಗಳಿವೆ. ಆದರೆ △ ಪಫರ ಇದರ ಕೋನಗಳು △ ಅಬಕ ಇದರ ತತ್ಸಮ ಕೋನಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಯ ಪೂರಕ ಕೋನಗಳಾಗುವವು.

೮. ತ್ರಿಕೋನವು ಲಘುಕೋನ, ಕಾಟಕೋನ, ವಿಶಾಲಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಯಾ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅದರ ಪರಿಮಧ್ಯವು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಬೀಳುವದು; ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದು; ಇಲ್ಲವೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಹೊರಗೆ ಬೀಳುವದು.

೯. ತ್ರಿಕೋನದೊಳಗಿನ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಬೆಳಿಸಿದ್ದರೆ, ಉಂಟಾಗುವ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಮತ್ತು ಆ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವವು.

೧೦. ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್ಮಧ್ಯ ಮತ್ತು ಪರಿಮಧ್ಯ ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ರೇಷೆಯು, ತ್ರಿಕೋನದೊಂದು ಭುಜದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ಸಮ ದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ಇರುವದು.

೧೧. $\triangle$ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ **ಯ** ಇದು ಅಂತರ್ಮಧ್ಯವಿದೆ. **ಯಈ $\perp$ ಕಅ, ಯಫ $\perp$ ಅಬ.** **ಯಅ** ಇದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು $\triangle$ **ಅಈಫ** ಇದರ ಪರಿಮಧ್ಯ ವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೨. $\triangle$ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ **ಪ** ಇದು ಲಂಬಸಂಪಾತ, ಮತ್ತು **ಮ** ಇದು ಪರಿಮಧ್ಯ ವಿದೆ. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ **ಡ, ಈ, ಫ** ಇವು ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಅಸಕೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ :

(೧) **ಮ** ಇದು $\triangle$ **ಡಈಫ** ದ ಲಂಬಸಂಪಾತವಿದೆ.

(೨) **ಕ್ಷ, ಯ, ಝ** ಇವುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಪಅ, ಪಬ, ಪಕ** ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.
ಪ ಇದು $\triangle$ **ಕ್ಷಯಝ** ದ ಲಂಬಸಂಪಾತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(೩) **ಅ** ಇದು $\triangle$ **ಪಬಕ** ದ, **ಬ** ಇದು $\triangle$ **ಪಕಅ** ದ ಮತ್ತು **ಕ** ಇದು $\triangle$ **ಪಅಬ** ದ ಲಂಬಸಂಪಾತಗಳಾಗಿವೆ.

೧೩. ತ್ರಿಕೋನವು ಲಘುಕೋನ, ಕಾಟಕೋನ ಅಥವಾ ವಿಶಾಲ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಯಾ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಸಂಪಾತವು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಬೀಳುವದು, ಒಂದು ಶಿರೋಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಏಕರೂಪ ಆಗುವದು, ಇಲ್ಲವೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಹೊರಗೆ ಬೀಳುವದು.

೧೪. ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಧ್ಯ, ಅಂತರ್ಮಧ್ಯ ಲಂಬಸಂಪಾತ ಮತ್ತು ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ ಇವೆಲ್ಲ ಏಕತ್ರವಾಗಿರುವವು.

೧೫. **ಗ** ಇದು $\triangle$ **ಅಬಕ** ದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವಿದೆ. ಆದರೆ,
$\triangle$ **ಬಗಕ** $=$ $\triangle$ **ಕಗಅ** $=$ $\triangle$ **ಅಗಬ** $= \frac{೧}{೩}$ **ಅಬಕ** ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೬. ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು, ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವದರಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳಾಗಿ ಇರುವವು.

೧೭. ಕೆಳಗೆ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬೇಕೆಂಬದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

(೧) ಎರಡು ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳು ಮತ್ತು ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ.

(೨) ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು; ಮತ್ತು ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ.

೧೮. ಕೆಳಗೆ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬೇಕೆಂಬದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ:

(೧) ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಮತ್ತು ಪರಿಮಧ್ಯ.

(೨) ಒಂದು ಶಿರೋಬಿಂದು, ಅದರ ಎದುರಿನ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು, ಮತ್ತು ಪರಿಮಧ್ಯ.

೧೯. ಕೆಳಗೆ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬೇಕೆಂಬದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ:

(೧) ಎರಡು ಶಿರೋಬಿಂದು ಮತ್ತು ಅಂತರ್ಮಧ್ಯ.

(೨) ಎರಡು ಶಿರೋಬಿಂದು ಮತ್ತು ಲಂಬಸಂಪಾತ.

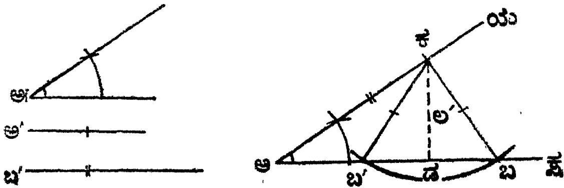
೨೦. ಒಂದು ನಿಯಮಿತ (regular) ಬಹುಕೋನದ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು **ಮ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವವು. ಆದರೆ ಆ ಬಹುಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಕೂಡಾ ಮ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವವೆಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೨೩ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ತ್ರಿಕೋನದ ಹಲಕೆಲವು ರಚನೆಗಳು

ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಲವು ರಚನೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಈಗ ಇನ್ನಷ್ಟು ರಚನೆಗಳ ಗಡುಚಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

[೧] ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭುಜದ ಎದುರಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಲು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.



ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದ ∠ಅ ಮತ್ತು ಅ′, ಬ′ ಎಂಬ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. (**ಅ′** ಇದು ∠ಅದ ಎದುರಿನ ಭುಜ.)

ಕೊಟ್ಟ ∠**ಅ** ಇವಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ **ಕ್ಷಅಯ** ಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಕೊಟ್ಟ **ಬ′** ರೇಖೆಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ **ಅಯ** ದಲ್ಲಿ **ಅಕ** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಇನ್ನು ಮೇಲೆ **ಬ** ಕೋನ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.
ನಾವು ಇದನ್ನು ಬಲ್ಲೆವು:—

(೧) **ಬ** ಬಿಂದುವು **ಅಕ್ಷ** ದಲ್ಲಿಯೇ ಇರಬೇಕು, ಮತ್ತು

(೨) **ಕಬ** ದ ಉದ್ದಳತೆಯು ಕೊಟ್ಟ **ಅ′** ದಷ್ಟು ಇರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ **ಕ** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ **ಅ′** ದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ತೆಗೆದ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ **ಬ** ಇರುವದು. ಅಂದರೆ **ಕ** ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು **ಅ′** ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ತೆಗೆದ ವರ್ತುಳವು **ಅಕ್ಷ** ರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ **ಬ** ಬಿಂದು ಇರುವದು.

ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಕಾರಗಳು ಸಂಭವಿಸುವವು:—

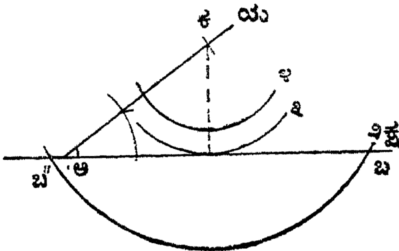
(೧) ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಆ ವರ್ತುಳವು **ಅಕ್ಷ** ರೇಷೆಯನ್ನು **ಬ** ಮತ್ತು **ಬ′** ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಈ ಸಮಯದಲ್ಲಿ **ಅಬಕ** ಮತ್ತು **ಅಬ′ಕ** ಎಂಬ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಂಭವಿಸುವವು.

ಇಂಥ ಪ್ರಕಾರಕ್ಕೆ **ಸಂದಿಗ್ಧ ಪ್ರಕಾರ** (Ambiguous Case) ಅನ್ನುವರು.

(೨) ವರ್ತುಳವು **ಅಕ್ಷ** ರೇಷೆಯನ್ನು **ಬ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಬೆಳಿಸಿದ **ಕ್ಷಅ** ರೇಷೆಯನ್ನು **ಬ′** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದೆ. ಈ ಸಮಯದಲ್ಲಿ **ಅಬಕ** ಇದೊಂದೇ ತ್ರಿಕೋನವು ಗ್ರಾಹ್ಯವಿದೆ. ಯಾಕಂದರೆ **ಅಬ′ಕ** ತ್ರಿಕೋನದ ∠**ಅ** ಇದು ಕೊಟ್ಟ ∠**ಅ** ಇದಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿಲ್ಲ. (∠**ಅ** ಇದು ಕಾಟಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ **ಅಬ′ಕ** ತ್ರಿಕೋನವಾದರೂ ಗ್ರಾಹ್ಯವಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆಗ **ಅಬಕ, ಅಬ′ಕ** ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುವವು. ಅಂದರೆ ನಿಜವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪ್ರಕಾರವು ಒಂದೇ ಆಗುವದು).

(೩) ವರ್ತುಳವು **ಅಕ್ಷ** ರೇಷೆಯನ್ನು **ಬ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡಿದರೆ ಮಾತ್ರ **ಅಬಕ** ಇದೊಂದೇ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಂಭವಿಸುವದು. ಮತ್ತು ಅದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುವದು.

(೪) ವರ್ತುಳವು **ಅಕ್ಷ** ರೇಷೆಯನ್ನು ಎಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸದಿದ್ದರೆ, ಅಥವಾ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡದಿದ್ದರೆ, ಕೊಟ್ಟ ಭಾಗಗಳಂಥ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಂಭವಿಸುವದಿಲ್ಲ.



(೨), (೩), ಮತ್ತು (೪) ಈ ಪ್ರಕಾರಗಳ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:—**ಕ** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದಳತೆಯು **ಲ′** ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ:—

(೧) **ಅ′>ಲ′** ಮತ್ತು **ಅ′>ಬ′** ಇದ್ದಾಗ ಪ್ರಕಾರ (೧) ಸಂಭವಿಸುವದು.

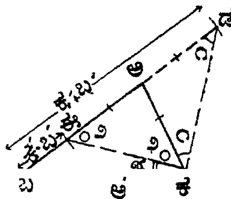
(೨) **ಅ′>ಬ′** ಇದ್ದಾಗ ಪ್ರಕಾರ (೨) ಸಂಭವಿಸುವದು.

(೩) **ಅ′=ಲ′** ,, ,, (೩) ,,

(೪) **ಅ′<ಲ′** ,, ,, (೪) ,,

ಕೊಟ್ಟ ∠**ಅ** ಇದು ಕಾಟಕೋನ ಇಲ್ಲವೆ ವಿಶಾಲಕೋನವಿದ್ದರೆ **ಅ′** ಭುಜವು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಿರುವದು. ಆಗ ಪ್ರಕಾರ (೧) ಸಂಭವಿಸುವದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, ∠**ಅ** ಲಘುಕೋನ ಇದ್ದು **ಅ′<ಬ′** ಪರಂತು **ಅ′>ಲ′** ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಸಂದಿಗ್ಧ ಪ್ರಕಾರವು ಸಂಭವಿಸುವದು.

[**೨**] ಮನಸ್ಸುಗೊಟ್ಟು ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಯ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ, ಇದರಿಂದ ಕೆಲವು ರಚನೆಗಳು ನಿಮ್ಮ ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಬರುವವು. ಈಗ ಅವುಗಳ ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ:—



ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ **ಅಬ > ಅಕ** ಇದ್ದರೆ **ಬಅ** ಭುಜವನ್ನು **ಡ** ವರೆಗೆ ಬೆಳಿಸಿ **ಅಡ = ಅಕ** ಮಾಡಿರಿ. **ಅಬ** ದಲ್ಲಿ **ಅಕ** ದಷ್ಟು **ಅಈ** ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಕಡ, ಕಈ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

∠**ಅಕಡ** = ∠**ಅಡಕ** = ∠**೧,**

∠**ಅಕಈ** = ∠**ಅಈಕ** = ∠**೨,** ಮತ್ತು ∠**ಬಕಈ** = ∠**೩**

ಇದರಿಂದ ಕಂಡುಬರುವದೇನಂದರೆ:—

∠**ಬಅಕ** = ∠೧ + ∠೧ = ೨ ∠೧ ∴ ∠೧ = ½ ∠**ಅ.**

$\angle$ **ಕಅಡ** $= \angle$ ೨ $+ \angle$ ೨ $=$ ೨ $\angle$ ೨ $\therefore \angle$ ೨ $= \frac{೧}{೨} \angle$ (೧೮೦$^\circ$ $-$ **ಅ**)
$=$ ೯೦$^\circ$ $- \frac{೧}{೨} \angle$ **ಅ**.

ಅಥವಾ ೧೮೦$^\circ$ $-$ **ಅ** $= \angle$ **ಬ** $+ \angle$ **ಕ** $\therefore \angle$ ೨ $= \frac{೧}{೨}$ ($\angle$ **ಬ** $+ \angle$ **ಕ**)

$\angle$ **ಬಕಈ** $= \angle$ **ಬಕಅ** $- \angle$ ೨ $= \angle$ **ಕ** $- \frac{೧}{೨}$ ($\angle$ **ಬ** $+ \angle$ **ಕ**)

$\therefore$ $\angle$ ೩ $= \frac{೧}{೨}$ ($\angle$ **ಕ** $- \angle$ **ಬ**).

ಅಂದರೆ, $\angle$ ೧ $= \frac{೧}{೨} \angle$ **ಅ**; $\angle$ ೨ $= \frac{೧}{೨}$ ($\angle$ **ಬ** $+ \angle$ **ಕ**);
$\angle$ ೩ $= \frac{೧}{೨}$ ($\angle$ **ಕ** $- \angle$ **ಬ**)

ಅದರಂತೆ, **ಬಡ** $=$ **ಬಅ** $+$ **ಅಡ** $=$ **ಕ**$'$ $+$ **ಬ**$'$
ಬಈ $=$ **ಬಅ** $-$ **ಈಅ** $=$ **ಕ**$'$ $-$ **ಬ**$'$

ಪುನಃ **ಅ** ಬಿಂದುವು **ಕಡ** ಮತ್ತು **ಕಈ** ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಮೇಲೆ ಬೀಳುವದೆಂದು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು:—

(೧) **ಬ**$'$ $+$ **ಕ**$'$, **ಅ**$'$, $\angle$ **ಬ** ಕೊಟ್ಟರೆ **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ಮೊದಲು $\triangle$ **ಬಡಕ** ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು **ಕಡ**ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವು **ಬಡ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಅ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಅಕ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ **ಅಬಕ** ಇಷ್ಟತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.

(೨) **ಬ**$'$ $+$ **ಕ**$'$, $\angle$ **ಅ**, $\angle$ **ಬ** ಕೊಟ್ಟರೆ **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

$\triangle$ **ಬಡಕ**ದ **ಬಡ** $=$ **ಬ**$'$ $+$ **ಕ**$'$ ಭುಜಗಳು, ಮತ್ತು $\angle$ **ಕಬಡ** $= \angle$ **ಬ**, $\angle$ **ಕಡಬ** $= \frac{೧}{೨} \angle$ **ಅ** ಇವುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇದರಿಂದ $\triangle$ **ಬಡಕ** ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಕಡ**ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ಬಡ** ಇವನ್ನು **ಅ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಅಕ ಕೂಡಿಸಿರಿ, ಅಂದರೆ **ಅಬಕ** ಇದು ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.

(೩) **ಕ**$'$ $-$ **ಬ**$'$, **ಅ**$'$, $\angle$ **ಬ** ಕೊಟ್ಟರೆ $\triangle$ **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

△ **ಬಕಈ** ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಕಈ** ಭುಜದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಬೆಳಿಸಿದ **ಬಈ** ರೇಷೆಯನ್ನು **ಅ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಅಕ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ **ಅಬಕ** ಇಷ್ಟತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.

(ಳ) **ಕ′ – ಬ′**, ∠**ಬ**, ∠**ಕ** ಕೊಟ್ಟರೆ △ **ಅಬಕ** ತೆಗೆಯುವದು.
∠**ಬಈಕ** = ೧೮೦° – ∠೨ = ೧೮೦° – ½ (∠ **ಬ** + ∠**ಕ**).

ಮೊದಲು **ಈ** ಕೋನದಷ್ಟು ∠**ಕ** ತಯಾರಿಸಿರಿ. △**ಬಈಕ** ದಲ್ಲಿ **ಬಈ** = **ಕ′ – ಬ′**, ∠**ಕಬಈ** = ∠**ಬ** ಮತ್ತು ∠**ಬಈಕ** = ∠**ಕ್ಷ** ಈ ಭಾಗಗಳು ಗೊತ್ತಿವೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ △ **ಬಈಕ** ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಈಕ** ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಬೆಳಿಸಿದ **ಬಈ** ಇದನ್ನು **ಅ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಅಕ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ △ **ಅಬಕ** ಇಷ್ಟತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.

(ಙ) **ಕ′ – ಬ′**, **ಅ′**, ∠**ಅ** ಕೊಟ್ಟರೆ △ **ಅಬಕ** ತೆಗೆಯುವದು.
∠**ಬಈಕ** = ∠**ಈಅಕ** + ∠**ಅಕಈ** = ∠**ಅ** + ∠**೨**
= ∠**ಅ** + ೯೦° – ½ ∠**ಅ** = ೯೦° + ½ ∠**ಅ**.

ಈ ಕೋನದಷ್ಟು ∠**ಯ** ತೆಗೆಯಿರಿ. △ **ಬಈಕ** ದಲ್ಲಿ ∠**ಬಈಕ** = ∠**ಯ**, **ಬಈ** = **ಕ′ – ಬ′**, **ಬಕ** = **ಅ′** ಈ ಭಾಗಗಳು ಗೊತ್ತಿವೆ. ಇದರಿಂದ △**ಬಈಕ** ತೆಗೆಯಿರಿ. (∠**ಬಈಕ** ಇದು ವಿಶಾಲಕೋನವಿರುವದರಿಂದ ಒಂದೇ ತ್ರಿಕೋನ ಉಂಟಾಗುವದು.) ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ (ಳ) ರಂತೆ △ **ಅಬಕ** ತೆಗೆಯಿರಿ.

*(**ಲ**) **ಕ′ + ಬ′**, **ಅ′**, ∠**ಅ** ಕೊಟ್ಟರೆ △ **ಅಬಕ** ತೆಗೆಯುವದು.

ಈ ಕೊಟ್ಟ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ **ಅ′** ಇದು **ಬ′ + ಕ′** ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರಬೇಕು. ಇದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ∠**ಬಡಕ** = ½ ∠**ಅ**, **ಬಡ** = **ಕ′ + ಬ′** ಮತ್ತು **ಬಕ** = **ಅ′** ಇವುಗಳಿಂದ △ **ಬಡಕ** ತೆಗೆಯಿರಿ. ∠**ಡ** ಇದು ಲಘುಕೋನವಿದ್ದು **ಬಕ** < **ಬಡ** ಇದ್ದದರಿಂದ ಸಂದಿಗ್ಧ ಪ್ರಕಾರ ಶಕ್ಯವಿದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ (ಮೇಲಿನ [೧] ರಲ್ಲಿ (೧) ಅಥವಾ (ಳ) ರಂತೆ) ಒಂದುವೇಳೆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಂಭವಿಸುವವು. ಅಥವಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳೇ ಸಂಭವಿಸ

ಲಾರವು. △ **ಬಡಕ** ಸಂಭವಿಸದಿದ್ದರೆ, △ **ಅಬಕ** ಸಂಭವಿಸುವದಿಲ್ಲೆಂಬದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. △ **ಬಡಕ**, △ **ಬಡಕ'** ಹೀಗೆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಂಭವಿಸಿದರೆ **ಡಕ**, **ಡಕ'** ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವು **ಬಡ** ಇದನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅ ಮತ್ತು ಅ'ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಮತ್ತು △ **ಅಬಕ** ಮತ್ತು △ ಅ'ಬಕ' ಹೀಗೆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಉಂಟಾಗುವವು.

ಡ
ಅ'
ಅ
ಬ
ಕ
ಕ'

ಟಿಪ್ಪಣಿ:—ಮೇಲಿನ (೫) ಮತ್ತು (೬) ಪ್ರಕಾರದ ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರಚನೆಗಳಿಂದ ಸುಲಭವಾದ ರಚನೆ ಮಾಡುವದು ಶಕ್ಯವಿದೆ. ಆದರೆ ಇದಕ್ಕೆ ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ೧೯ನೆಯ ಕೃತ್ಯದ ಆವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಕೃತ್ಯದ ಅಭ್ಯಾಸವಾದೊಡನೆ ಈ ಪ್ರಕಾರಗಳ ಪುನಃ ವಿಚಾರ ಮಾಡಬೇಕು. [ಉದಾ. ಸ. ೩೧ ರಲ್ಲಿ ಉದಾ. ೩ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]

*(೭) **ಕ' − ಬ'**, **ಅ'** ಮತ್ತು ∠ ಕ + ∠ **ಬ** ಕೊಟ್ಟರೆ, △ **ಅಬಕ** ತೆಗೆಯುವದು.

(∠ **ಕ** + ∠ **ಬ**) ಇದು ∠ **ಅ** ಇದರ ಪೂರಕವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ∠ **ಅ** ತಿಳಿಯುವದು. ನಂಬರ [೫] ರಂತೆ △ **ಅಬಕ** ತೆಗೆಯಿರಿ.

*(೮) **ಕ' + ಬ'**, **ಅ'**, (∠ **ಕ** − ∠ **ಬ**) ಕೊಟ್ಟರೆ, △ **ಅಬಕ** ತೆಗೆಯುವದು.

$\angle$ **ಬಕಡ** $=$ ೯೦° $+ \angle$ **ಇ** $=$ ೯೦° $+ \frac{೧}{೨} (\angle$ **ಕ** $- \angle$ **ಬ**) ಎಂದು ತಿಳಿಯು ವದು. ಅಂದರೆ Δ **ಬಕಡ** ದಲ್ಲಿ **ಬಡ** (= **ಕ**′ + **ಬ**′), **ಬಕ** (= **ಅ**′) ಈ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು **ಬಡ** ದ ಎದುರಿನ **ಬಕಡ** ಕೋನವು ತಿಳಿದಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ [೧] ರಂತೆ Δ **ಬಕಡ** ನೀವು ತೆಗೆಯಬಹುದು. (**ಬಕಡ** ಇದು ವಿಶಾಲಕೋನವಿರುವದರಿಂದ ಸಂದಿಗ್ಧ ಪ್ರಕಾರ ಸಂಭವಿಸುವದಿಲ್ಲ.) ನಂತರ **ಕಡ** ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ಬಡ** ಇದನ್ನು **ಅ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಅಕ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ Δ **ಅಬಕ** ಇಷ್ಟತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.

*(೯) **ಕ**′ - **ಬ**′, **ಅ**′, ($\angle$ **ಕ** $- \angle$ **ಬ**) ಕೊಟ್ಟರೆ Δ **ಅಬಕ** ತೆಗೆ ಯುವದು.

(**ಕ**′ - **ಬ**′ < **ಅ**′) $\angle$ **ಇ** $= \frac{೧}{೨} (\angle$ **ಕ** $- \angle$ **ಬ**); ಇದರಿಂದ, Δ **ಬಈಕ** ಇದರ **ಬಈ** (= **ಕ**′ - **ಬ**′), **ಬಕ** (= **ಅ**′) ಈ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು **ಬಈ** ಎದುರಿನ $\angle$ **ಬಕಈ** (= $\angle$ **ಇ**) ಇವು ತಿಳಿಯುವವು ಇಲ್ಲಿ **ಬಈ** < **ಬಕ** ಮತ್ತು $\angle$ **ಇ** ಇದು ಲಘುಕೋನ ಇರುವದರಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಂಭವಿಸುವವು; ಅಥವಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳೇ ಸಂಭವಿಸಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ. **ಬಈಕ**, **ಬಈ**′**ಕ** ಹೀಗೆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಂಭವಿಸಿದರೆ, **ಈಕ**, **ಈಕ**′ ಇವುಗಳ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವು ಅನುಕ್ರಮ ವಾಗಿ **ಅ**, **ಅ**′ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು; ಮತ್ತು Δ **ಅಬಕ**, Δ **ಅ**′**ಬಕ** ಹೀಗೆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಉಂಟಾಗುವವು.

*(೧೦) **ಅ**′, $\angle$ **ಅ**, ($\angle$ **ಕ** $- \angle$ **ಬ**) ಕೊಟ್ಟರೆ Δ **ಅಬಕ** ತೆಗೆಯು ವದು.

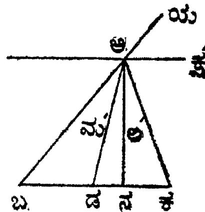
Δ **ಬಈಕ** ಇದರ **ಬಕ** (= **ಅ**′) ಈ ಭುಜ, ಮತ್ತು $\angle$ **ಬಈಕ** (= ೯೦° $+ \frac{೧}{೨} \angle$ **ಅ**) ಮತ್ತು $\angle$ **ಬಕಈ** (= $\frac{೧}{೨} (\angle$ **ಕ** $- \angle$ **ಬ**)) ಈ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ತಿಳಿದಿರುವವು. ಇದರಿಂದ ಮೊದಲು ಆ ತ್ರಿಕೋನ ವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ನಂತರ $\angle$ **ಅಬಕ** ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಅಥವಾ :— $\angle$ **ಕ** $+ \angle$ **ಬ** $=$ ೧೮೦° $- \angle$ **ಅ** ಇದು ತಿಳಿದ ಸಂಗತಿ. ಮತ್ತು Δ **ಕ** $- \angle$ **ಬ** ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾ

ಬಾಕಿ ಮಾಡಿ ∠**ಕ** ಮತ್ತು ∠**ಬ** ಇವುಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಂದರೆ **ಬಕ** (= **ಅ**′) ಭುಜ, ಮತ್ತು ∠**ಬ**, ∠**ಕ** ಇವು ತಿಳಿದದ್ದರಿಂದ Δ **ಅಬಕ** ಇದನ್ನು ನೀವು ತೆಗೆಯಬಹುದು.

[೩] ತ್ರಿಕೋನದ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಕೊಟ್ಟ ಎಲ್ಲ ಭಾಗ ಗಳು, ಭುಜ ಅಥವಾ ಕೋನ ಇವುಗಳ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿರಬೇಕೆಂಬ ನಿಯಮ ವಿಲ್ಲ. ಮಧ್ಯರೇಖೆ, ಎತ್ತರ, ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮೊದಲಾದ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೂ ತ್ರಿಕೋನದ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಬರುವದು. ಇಂಥ ರಚನೆಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನು ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

Δ **ಅಬಕ** ದಲ್ಲಿ **ಅಡ** (= **ಮ**′) ಇದು ಮಧ್ಯರೇಖೆಯೂ, **ಅನ** (= **ಲ**′), ಇದು ಎತ್ತರವೂ ಆಗಿವೆ. **ಅ** ದಿಂದ **ಬಕ** ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ **ಕ್ಷ**′ ರೇಖೆ ಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. Δ **ಅಬಕ** ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು Δ ಈ ಚಿಹ್ನೆ ದಿಂದ ಗುರುತಿಸಿರಿ.



ಬಕ ತಳರೇಖೆಯನ್ನು **ಲ**′ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿವೆ. **ಬಕ** ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ವಾಗಿ ತೆಗೆದ **ಕ್ಷ**′ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ **ಲ**′ ಅಂತರದಷ್ಟು ಯಾವದೊಂದು ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ **ಅ** ಶಿರೋಬಿಂದುವು ಇರಲೇಬೇಕು.

ಬಕ(=**ಪ**′) ಇದೊಂದು ತಳರೇಖೆ, Δ ಇದೊಂದು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಕೊಟ್ಟರೆ, ಇದರಿಂದ **ಲ**′=**೨** Δ/**ಪ**′ ಈ ಎತ್ತರವನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು. ಮತ್ತು ಈ ಎತ್ತರದಷ್ಟು ಅಂತರದಲ್ಲಿ **ಬಕ** ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯೋ ಒಂದು **ಅ** ಬಿಂದು ಇರುವದು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ತಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಕೊಟ್ಟರೆ ಶಿರೋಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವು, ತಳರೇಖೆಯು ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿಂದ ತೆಗೆದ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾಗುವವು. ಪರಂತು ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಬಹು ತರವಾಗಿ ಏಕರೂಪ ಇರುವವು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ತಳರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವರು.

ಕೆಳಗಿನ (೧) ರಿಂದ (೩) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಸಂದರ್ಭದ ಸಲುವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು

(೧) **ಬಕ** ತಳರೇಖೆಯನ್ನು, **ಅಡ** ಮಧ್ಯರೇಖೆಯನ್ನು ಮತ್ತು **ಲ'** ಎತ್ತರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಇದರಿಂದ △ **ಅಬಕ** ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಬಕ ದಷ್ಟು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದನ್ನು **ಡ** ದಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ. **ಡ** ಕೇಂದ್ರದಿಂದ **ಅಡ** ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ಕ್ಷ** ರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸುವಲ್ಲಿ ಒಂದು **ಅ** ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಅಡ > **ಲ'** ಇದ್ದರೆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಪರಂತು ಅವು ಏಕರೂಪ ಇರುವವು. **ಅಡ** = **ಲ'** ಇದ್ದರೆ ಒಂದೇ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಮತ್ತು ಅದು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ಇರುವದು. **ಅಡ** < **ಲ'** ಇದ್ದರೆ, ಕೊಟ್ಟ ಭಾಗಗಳಿಂದ ತ್ರಿಕೋನ ಮಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಬರ ಲಾರದು.

(೨) **ಬಕ** ತಳರೇಖೆಯನ್ನು, **ಬ** ಕೋನವನ್ನು ಮತ್ತು **ಲ'** ಎತ್ತರ ವನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, △ **ಅಬಕ** ತೆಗೆಯುವದು.

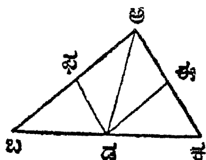
ಕೊಟ್ಟ **ಬಕ** ದಷ್ಟು ತಳರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಕೊಟ್ಟ ∠ **ಬ** ದಷ್ಟು ∠ **ಕಬಯ** ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಬಯ** ರೇಖೆಯು **ಕ್ಷ** ರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸುವಲ್ಲಿ **ಅ** ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

(೩) **ಬಕ** ತಳರೇಖೆಯನ್ನು, ∠ **ಬ** ಕೋನವನ್ನು, ಮತ್ತು **ಅಡ** ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, △ **ಅಬಕ** ತೆಗೆಯುವದು.

ಕೊಟ್ಟ **ಬಕ** ದಷ್ಟು ಒಂದು ತಳರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ **ಡ** ಮಧ್ಯಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಬ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ∠ **ಬ** ದಷ್ಟು

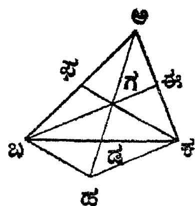
ಕಬಯ ಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಡ** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ **ಡಅ** ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ಬಯ** ರೇಷೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸುವಲ್ಲಿ **ಅ** ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು, ಅಥವಾ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಆಗಬಹುದು, ಇಲ್ಲವೇ ತ್ರಿಕೋನವೇ ಉಂಟಾಗಲಾರದು.

(ಳ) **ಅಬ, ಅಕ** ಭುಜಗಳನ್ನು ಮತ್ತು **ಅಡ** ಮಧ್ಯರೇಷೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, △ **ಅಬಕ** ತೆಗೆಯುವದು.



ಅಕ, ಅಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಈ, ಫ** ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಅಈಡ** ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರೂ ಭುಜಗಳು ತಿಳಿದಿರುವವು. ಇದರಿಂದ ½ **ಅಕ**, ½ **ಅಬ** ಮತ್ತು **ಅಡ** ಇಂಥ ಮೂರು ಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೊದಲು △ **ಅಡಈ** ತೆಗೆಯಿರಿ. ನಂತರ **ಅಈಡಫ** ದಷ್ಟು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಈ, ಅಫ**ಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಕ, ಬ** ವರೆಗೆ ಬೆಳಿಸಿರಿ. **ಈಕ=ಅಈ** ಮತ್ತು **ಫಬ=ಅಫ** ಆಗಿರಬೇಕು. ಆಗ **ಬಡಕ** ಇದೊಂದು ಸರಳರೇಷೆ ಆಗುವದು; ಅದನ್ನು ತೆಗೆದರೆ **ಅಬಕ** ಎಂಬದೊಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.

(ಱ) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಮಧ್ಯರೇಷೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಅದರಿಂದ ಆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವದು.



ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ △ **ಬಗಹ** ಇದರ ಭುಜಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಮಧ್ಯರೇಷೆಗಳ ⅔ದಷ್ಟು ಇರುವವೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ನಿಮಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟ ಕಾಣುವದು.

ಆದ್ದರಿಂದ △ **ಬಗಹ** ಮೊದಲು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಗಅ=ಹಗ** ಆಗುವಂತೆ ಅ ಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗೆ **ಹಗ** ಬೆಳಿಸಿರಿ. **ಬಹಕಗ** ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ ನಿಮಗೆ **ಕ** ಶಿರೋಬಿಂದು ದೊರೆಯುವದು. **ಅಬ, ಅಕ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ **ಅಬಕ** ಇಷ್ಟತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.

ನೀವು ನಿಮ್ಮ ಟಿಪ್ಪಣಿ ಬುಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಇವರ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಬರೆದಿಡಿರಿ.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯು:— ಈ ರಚನೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡ ಬಹುದು.

ಅ, ಬ, ಕ ಗಳಿಂದ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಕ್ಷ', ಯ', ಝ'** ಇವೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. **ಈಪ = ಕ್ಷ', ಬಈ = ಯ', ಬಪ = ಝ'** ತೆಗೆದುಕೊಂಡು △ **ಬಈಪ** ತೆಗೆಯಿರಿ. ಇದರ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಮಿಲನ ಬಿಂದುವಿಗೆ **ಡ** ಎಂದು ಕರೆಯಿರಿ. **ಡಕ = ಬಡ** ಆಗುವಂತೆ **ಬಡ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಕ** ದ ವರೆಗೆ ಬೆಳಿಸಿರಿ. **ಕಈ** ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಮತ್ತು ಅದನ್ನು **ಈಅ = ಕಈ** ಆಗು ವಂತೆ **ಅ** ವರೆಗೆ ಬೆಳೆಸಿರಿ. **ಅಬ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ **ಅಬಕ** ಇಷ್ಟತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.

ಇದರ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ನೀವು ನಿಮ್ಮ ಟಿಪ್ಪಣಿ ಬುಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿಡಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಅದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಅನೇಕ ಪ್ರಕಾರಗಳುಂಟು. ಅವುಗಳ ಕೇವಲ ಯಾದಿಯನ್ನು ಕೊಡುವದೂ ಇಲ್ಲಿ ಶಕ್ಯವಿಲ್ಲ. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆ ಗಳ ಮೇಲಿಂದ, ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ ಯಾವ ರೀತಿಯ ವಿಚಾರ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದು ನಿಮ್ಮ ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಬರುವದು. ಕೊಟ್ಟ ಅವಯವಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಶಕ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆದು ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ರಚನೆಯ ಇಷ್ಟಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವಿರುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

ನೀವು ನಿಮ್ಮ ಟಿಪ್ಪಣಿ ಬುಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಕಾರದ ಅವಯವ ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅವುಗಳಿಂದ ಆಯಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ಆಧಾರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇಂಥ ಕೆಲವು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು; ಮುಂದೆ ಬರುವ ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೧ ಮತ್ತು ೩೨ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ೧೭ ಮತ್ತು ೨೦ ಉದಾಹರಣೆ ಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಮುದಾಯ ೩.

ಅ

೧. $\triangle$ ಅಬಕ ದ ಅಬ, ಅಕ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ರ, ಫ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಗಳಿರುವವು. ಬಅ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆದ ಕಈ ರೇಖೆಯು ಬೆಳಿಸಿದ ಬಫ ರೇಖೆಗೆ ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. $\triangle$ ರಫಈ ಮತ್ತು $\triangle$ ರಫಕ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

೨. ಕರ್ಣವು ೫ ಸೆ. ಮಿ. ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೫ ಚೌ. ಸೆ. ಮಿ. ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ. (ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

೩. ೪೦ ಫೂಟು ಉದ್ದವಾದ ಒಂದು ಕಂಬವಿದೆ. ೫೦ | ೫೦ ಫೂಟು ಉದ್ದವಾದ ಸರಿಯಾದ ನಾಲ್ಕು ಹಗ್ಗಗಳನ್ನು ಆ ಕಂಬದ ತುದಿಗೆ ಕಟ್ಟಿರುವವು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಗ್ಗದ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯನ್ನು ನೆಲದಲ್ಲಿ ನೆಡಿಸಿದ ಒಂದೊಂದು ಕೊಂಡಿಗೆ ಕಟ್ಟಿರುವದು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೊಂಡಿಯು ಆ ಕಂಬದ ತಳದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು ?

೪. ಕ್ಷ^{2} = ಅ^{2} + ಬ^{2}, ಯ^{2} = ಬ^{2} + ಕ^{2}, ಝ^{2} = ಕ^{2} + ಅ^{2}. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕ್ಷ, ಯ, ಝ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯು ಧನ (Positive) ಹಿಡಿದು ಆಯಾ ಭುಜಗಳಂಥ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅದು ಲಘುಕೋನವಾಗುವದೆಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೫. ಅಬ ॥ ಕಡ. ಮ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ, ಕಡ ರೇಖೆಯನ್ನು ಫ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಪಫ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಕ

೧. ಅಬಕಡ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಅದರ ಹೊರ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಬೆಳಿಸಿದ ಅಡ, ಬಕ ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಆದರೆ, $\triangle$ ಬಡಪ = $\triangle$ ಅಡಪ + $\triangle$ ಕಡಪ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

(ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

೨. ಅಕ ಕರ್ಣವು ೪ ಸೆ. ಮಿ., ಒಂದು ಭುಜ ಅಬ ಇದು ೪.೫ ಸೆ. ಮಿ. ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ೧೨ ಚೌ. ಸೆ. ಮಿ. ಆಗುವಂತೆ ಅಬಕಡ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. (ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

೩. ಅಬಕಡ ಚೌಕೋನದ ಅಕ, ಬಡ ಕರ್ಣಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಕಾಟಕೋನದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ ಅಬ^2 + ಕಡ^2 = ಬಕ^2 + ಡಅ^2 ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಅಬಕಡ ಚೌರಸದ ಬಕ ಭುಜವನ್ನು ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗೆ ಬೆಳೆಸಿದರೆ, ಅಪ^2 = ಕಪ^2 + ೨ಬಕ . ಬಪ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಸಅ, ಸಬ ರೇಖೆಗಳು ಕಾಟಕೋನದಲ್ಲಿವೆ. (ಸಅ ಅಥವಾ ಸಬಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ) ಮನ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು (ಕೊಟ್ಟಷ್ಟು ಉದ್ದವಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು) ಸರಿಸುತ್ತ, ಅದರ ಮ ಬಿಂದುವು ಸಅ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ನ ಬಿಂದುವು ಸಬ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಬೀಳುವಂತೆ ಮಾಡಿರಿ. ಸಮಪನ ಆಯತವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಪ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ಹೇಳಿರಿ.

ಖ

೧. △ಅಬಕ ಇದರ ಅಬ ಭುಜದಲ್ಲಿ ರ ಇದೊಂದು ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆ. ಅಕ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಯಾವದೋ ಒಂದು ಪ ಬಿಂದುವಿದೆ. △ರಪಸ ಮತ್ತು △ರಕಪ ಇವು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಆಗುವಂತೆ ಬಪ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸದ ವರೆಗೆ ಬೆಳೆಸಿದೆ. ಆದರೆ, ಕಸ ‖ ಬಅ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ. (ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

೨. ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಆಗುವಂತೆ. ಮತ್ತು ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಮಿತಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಪರಿಮಿತಿಯುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩. ಅಬಕ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಬಕ ಕರ್ಣವೂ, ಅದರಲ್ಲಿ ಮ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವೂ ಇದೆ. ಆದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು, ಅಮ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸದ ೮ ಪಟ್ಟು ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ೬", ೧೨", ೧೫" ಇವೆ. ಆದರೆ ಇದರ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೫. ಬಕ ನಿಯತ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ನಿಯತ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಪಬಕ ಎಂಬದೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. ಮ ಇದು ಬಕದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆ. ಆದರೆ ಪಮದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಗ

೧. ಅಬಕಡ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ಪ ಇದೊಂದು ಬಿಂದುವಿದೆ. ಆದರೆ △ಅಪಬ + △ಡಪಕ = △ಬಪಕ + △ಅಪಡ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೨. ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಆಗುವಂತೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿಮಿತಿಗೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩. ಅಬಕ ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಕ ತಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವದೋ ಒಂದು ಡ ಬಿಂದುವಿದೆ. ಆದರೆ ಅಬ^2 = ಅಡ^2 + ಬಡ . ಡಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಡ ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಯು ಅಕ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದೆ. ಆದರೆ ಅಬ^2 = ಅಡ^2 + ಬಡ^2 + ಡಕ^2 ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಅಬಪಫ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನೂ, ಅದರ ಅಬ ತಳರೇಖೆಯನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಕರ್ಣಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಘ

೧. $\triangle$ ಅಬಕ ಇದರ ಕಅ, ಕಬ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ, ಫ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅಪ = $\frac{೧}{ಮ}$ ಅಕ, ಮತ್ತು ಕಫ = $\frac{೧}{ನ}$ ಕಬ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$\triangle$ ಅಪಫ = $\frac{೧}{ಮನ}$ $\triangle$ ಅಬಕ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೨. ೩ ಸೆ. ಮಿ. ನಿಯಮಿತ ಭುಜಗಳ ಷಟ್ಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ರಚನೆಯಿಂದ (ಗಣಿತ ಮಾಡದೆ) ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಚೌರಸವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದ $\angle$ ಅ ಕಾಟಕೋನವಿದೆ. ಆದರೆ ಅಬ ಮತ್ತು ಅಕ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಹೊರ ಮಗ್ಗಲು ಅಬಡಈ, ಅಕಫಗ ಚೌರಸಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಡ, ಅಫ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಆ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈಗ ಕೂಡಿಸಿರಿ, ಬಡಫಕ ಮತ್ತು ಡಈಗಫ ಈ ಚೌಕೋನಗಳು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಅಬಕಡ ಸಮಾ. ಭು. ಚೌಕೋನದ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಆದರೆ ಪಅ^2 − ಪಬ^2 + ಪಕ^2 − ಪಡ^2 ಇದು ರಾಶಿ ನಿಯಮವಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. $\triangle$ ಪಅಬ = $\triangle$ ಪಅಕ; ಆದರೆ ಪ ದ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೫

೧. ಅಬಕಡ ಚೌರಸವಿದೆ. ಅಬ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಹ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಅದರಿಂದ ಅಹ $= \frac{೧}{೩}$ ಅಬ ಆಗಿದೆ. ಮತ್ತು ಹಕ ದಲ್ಲಿ ಫ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ; ಇದರಿಂದ ಹಫ $= \frac{೧}{೩}$ ಹಕ ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ ಅಹಫಡ ಚೌಕೋನ $= \frac{೧}{೩}$ ಅಬಕಡ ಚೌರಸ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಕ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಡ ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಈ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿ ಮೂರು ಭಾಗಗಳಾಗುವಂತೆ ಡ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

[ಪ ಮತ್ತು ಫ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಬಕ ದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ಮೂರು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಅಪ, ಅಫ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಪ ಮತ್ತು ಫ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಅಡಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ವಾಗಿ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವು ಅಬ, ಅಕ ಭುಜಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಹ ಮತ್ತು ಖ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವವು. ಡಹ, ಡಖ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅವು ಇಷ್ಟ ರೇಖೆಗಳೆಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.]

೩. ಅಬಕಡ ಬಹಿರ್ವಕ್ರ ಚೌಕೋನದ ಬಕಡ ಮತ್ತು ಬಡಅ ಇವು ಕಾಟಕೋನ ಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಅಬ ಭುಜವು ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳಿಂದ ದೊಡ್ಡದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅಬ^{೨} = ಬಕ^{೨} + ಕಡ^{೨} + ಡಅ^{೨} ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೪. ಅಬಕಡ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ಅಬ, ಡಕ ಭುಜಗಳು ಸಮಾಂತರ ವಾಗಿವೆ. ಆದರೆ ಅಕ^{೨}+ಬಡ^{೨}=ಅಡ^{೨}+ಬಕ^{೨}+೨ಅಬ·ಕಡ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಅ, ಬ, ಕ, ಡ ಈ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅಕ = ಅಡ ಮತ್ತು ಬಕ = ಬಡ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಅಬ ದಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೊಂದು ಬಿಂದುವು ಕ ಮತ್ತು ಡ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೬

೧. (ಅಬ || ಡಕ ಇರುವ) ಅಬಕಡ ಸಮಲಂಬದ ಕರ್ಣಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಮ ಇದೆ. ಬ ಮತ್ತು ಡ ಗಳಿಂದ ಅಕ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಗಳನ್ನು, ಮ ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಯಾವದೊಂದು ರೇಖೆಯು ಹ ಮತ್ತು ಫ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ △ಅಹಫ = △ಅಬಡ ಮತ್ತು ಅಹ || ಕಫ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ೫ ಸೆ. ಮಿ. ಮತ್ತು ೬ ಸೆ. ಮಿ. ಇರುವ ಹಾಗು ಶಕ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩. ಅ > ಬ ಇದ್ದರೆ ಭೂಮಿತಿಯಿಂದ $\sqrt{\text{ಅ}^{೨} - \text{ಬ}^{೨}} > \text{ಅ} - \text{ಬ}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಅ ದಷ್ಟು ಕರ್ಣವನ್ನೂ, ಬ ದಷ್ಟು ಒಂದು ಭುಜವನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಿರಿ.]

೪. △ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ ಬಈ, ಕಫ ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಅಪೋಲೋನಿಯಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಬ = ಅಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಕೊಟ್ಟ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸರಿಯಾದ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು ತೆಗೆಯಿರಿ. ನಿಮಗೆ ಶಕ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಕಾರಗಳಿಂದ ವಿವೇಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಛ

೧. ಕೊಟ್ಟ ಚೌರಸಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗುವಂತೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿಮಿತಿಯು ಇಮ್ಮಡಿ ಪರಿಮಿತಿ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಇಂಥ ಎಷ್ಟು ಸಮಾ. ಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳು ಸಾಧ್ಯವಿರುವವು?

೨. ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಅಈಮನ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಾ. ಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಮತ್ತು ಅದರ ಅಮ ಕರ್ಣವು ಅಕ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿದೆ. ಆದರೆ △ ಈಮಕ ಮತ್ತು △ ನಮಕ ಇವು ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಚೌರಸದ ಒಂದು ಭುಜವು ಅದರ ಕರ್ಣಕ್ಕಿಂತ ೧೦ ಇಂಚಿನಿಂದ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಆ ಭುಜದ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ಅಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವವಾದರೂ ಕ ಮತ್ತು ಡ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅಕ · ಕಡ + ಕಡ · ಡಬ + ಕಡ^{೨} ಇಷ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವುಳ್ಳ ಒಂದೇ ಆಯತವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೫. △ ಅಬಕ ದ ∠ ಕ ವಿಶಾಲ ಕೋನವಿದೆ. ಬಕ ದಲ್ಲಿ ಡ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆ. ಅಈ ⊥ ಬಕ ಇದ್ದರೆ, ಅಬ^{೨} − ಅಕ^{೨} = ೨ಬಕ · ಡಈ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

ಜ

೧. ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದು. ಆದರೆ ಆ ರೇಖೆಯು ಆ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಒಂದೇ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖಾಕೃತಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರೊಳಗೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ

ಮೇಲೆ ಒಂದೊಂದು ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಇವರಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಬಿಟ್ಟು ಇನ್ನೊಂದು ಈ ಕ್ರಮವಲ್ಲಿಯ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು, ಉಳಿದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ ಸರಿಯಿರುವದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. **ಅಬಕಡಈಫ** ಇದೊಂದು ಸಮಾನ ಷಟ್‌ಕೋನವಿದೆ. ಆದರೆ,

$೧೨ಅಬ^{೨} = ೪ಅಕ^{೨} = ೩ಅಡ^{೨}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. **ಅಬಕಡ** ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ **ಅಬ=ಬಡ** ಇದ್ದರೆ,

$ಬಡ^{೨} + ೨ಬಕ^{೨} = ಅಕ^{೨}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಒಂದು ಚೌರಸದ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಒಂದು ಸುಸಮ ಅಷ್ಟಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದೆ. ಆದರೆ ಅಷ್ಟಕೋನ ಭುಜವು ಮೂಲ ಚೌರಸದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಭುಜಗಳ ವಜಾ ಬಾಕಿಯೆಷ್ಟಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಝುಂ

೧. ಒಂದೇ ತಳರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು ಕೊಟ್ಟ ಚೌರಸದಷ್ಟು ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸ್ಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೨. ಒಂದು ಚಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕೋನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು ನಿಯತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವು ವರ್ತುಳ ಇರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಇಮ್ಮಡಿಯು, ಆದರ ಯಾವದೊಂದು ಭುಜದ ಮುಮ್ಮಡಿ (ಮೂರುಪಟ್ಟು) ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

***೪.** △ **ಅಬಕ** ದ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ **ಬಕಖಲ, ಕಅಮನ, ಅಬಪಫ** ಚೌರಸಗಳು ಆದರ ಹೊರ ಮಗ್ಗಲಿಗಿವೆ. ಆದರೆ,

$ಅಖ^{೨} + ಬಮ^{೨} + ಕಪ^{೨} = ಅಲ^{೨} + ಬನ^{೨} + ಕಫ^{೨}.$

೫. ನಾಲ್ಕನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ **ಖ, ನ; ಮ, ಫ; ಪ, ಲ;** ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ. **ಖನಮಫಪಲ** ಇದೊಂದು ಷಟ್‌ಕೋನ ಉಂಟಾಗುವದು. ಆದರೆ ಈ ಷಟ್‌ಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಬೇರೀಜು, ಮೂಲ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ಇರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ತಾತ್ವಿಕ ವಿವೇಚನೆ



ಮೂರನೆಯ ಭಾಗ

ವರ್ತುಳ

ಮೂರನೆಯ ಭಾಗ

ವರ್ತುಳ

೨೪ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆ

ನಾವು ಈ ಮೊದಲು ವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ತತ್‌ಸಂಬಂಧ ಭಾಗಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅರಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. (ಭೂಮಿತಿ ಮೊದಲನೆಯ ಪುಸ್ತಕದ ಪುಟ ೨೨೫, ೨೨೬ ನೋಡಿರಿ). ಇನ್ನು ಮೇಲೆ ವರ್ತುಳದ ಕೆಲವು ಗುಣ ಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಚನ್ನಾಗಿ ಅರಿತುಕೊಳ್ಳೋಣ.

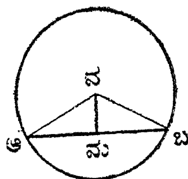
(೧) ವರ್ತುಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಪೂರ್ಣತ್ವದಿಂದ ಕೂಡಿಸಬಹುದು; ಅಂದರೆ ಆ ವರ್ತುಳಗಳು ಏಕರೂಪವಾಗಿರುವವು.

(೨) ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಯಾವದೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಂತರವು, ಆವರಲ್ಲಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವು ವರ್ತುಳದ ಒಳಗೆ ಇರುವದು; ಅಂತರವು ತ್ರಿಜ್ಯವಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ, ಅದು ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಇರುವದು; ಮತ್ತು ಅಂತರವು ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗೆ ಇರುವದು.

(೩) ಯಾವದೊಂದು ವ್ಯಾಸವಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಮಡಿಚಿದಾಗ್ಯೂ, ಅದರಿಂದುಂಟಾದ ಅದರ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳು ಪೂರ್ಣತ್ವದಿಂದ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಬೀಳುವವು; ಅಂದರೆ ವರ್ತುಳವು ತನ್ನ ಯಾವದೊಂದು ವ್ಯಾಸದ ಸುತ್ತಲು **ಸಮಪ್ರಮಾಣ** (Symmetrical) ದಲ್ಲಿ ಇರುವದು. (ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ವಿಭಾಗದ ೧೦೨, ೧೦೩, ೧೦೪ ಪುಟಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ).

ಪ್ರಮೇಯ ೪೩.

ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇವು ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ವಾ ಗಿರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— **ವ** ಇಂದೊಂದು ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ; **ಮ** ಇದು ಅಬ ಜ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:—**ವಮ** ರೇಖೆಯು **ಅಬ** ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಿದೆ.

ರಚನೆ:—**ವಅ, ವಬ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:—**ವಅಮ, ವಬಮ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

ವಅ = ವಬ (ತ್ರಿಜ್ಯ)
ಅಮ = ಬಮ (ಮ ಇದು ಅಬದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು)
ವಮ = ವಮ (ಸಾಧಾರಣ).

∴ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುವವು. (ಮೂರೂ ಭುಜಗಳು)

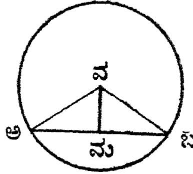
∴ ∠ **ವಮಅ** = ∠ **ವಮಬ**

∴ ಇವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾಟಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಅಂದರೆ **ವಮ** ರೇಖೆಯು **ಅಬ**ದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ ೪೪.

ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬವು ಆ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ವರ್ತುಳದ **ವ** ಕೇಂದ್ರದಿಂದ **ಅಬ** ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ **ವಮ** ಲಂಬ ತೆಗೆದಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:—ಅಮ = ಬಮ.

ರಚನೆ:—ವಅ, ವಬ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:—ವಅಮ, ವಬಮ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

∠ **ವಮಅ**, ∠ **ವಮಬ** ಇವು ಕಾಟಕೋನಗಳು. (ಪಕ್ಷ)
ವಅ = ವಬ (ತ್ರಿಜ್ಯ)
ವಮ = ವಮ (ಸಾಧಾರಣ)

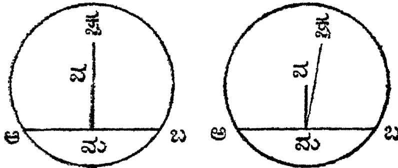
∴ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇವೆ (ಕಾ. ಕೋನ, ಕರ್ಣ, ಭುಜ)

∴ **ಅಮ = ಬಮ.**

ಟಿಪ್ಪಣಿ:—ವಅಬ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮದ್ವಿಭುಜವಾಗಿದೆ; ಮತ್ತು ೪೩, ೪೪ ಪ್ರಮೇಯಗಳಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದ ಸಂಗತಿಗಳು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗುಣ ಧರ್ಮಗಳಾಗಿವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ ೪೫.

ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.



ಪಕ್ಷ:— **ವ** ಇದೊಂದು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ; **ಅಬ** ಇದೊಂದು ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯಿದೆ. **ಅಬ**ದಲ್ಲಿ **ಮ** ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆ. ಮತ್ತು **ಅಬ**ದ ಮೇಲೆ **ಮಕ್ಷ** ಲಂಬವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:—**ಮಕ್ಷ** ರೇಷೆಯು **ವ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:—ವ ಕೇಂದ್ರ; **ಮ** ಇದು ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು.

∴ **ವಮ** ⊥ **ಅಬ.** (ಪ್ರ. ೪೩)

ಅಂದರೆ, **ಮವ, ಮಕ್ಷ** ಈ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೇಷೆಗಳು **ಅಬ**ದ ಮೇಲೆ **ಮ** ಇದೊಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂಬರ್ಥ. ಆದರೆ ಇದು ಅಶಕ್ಯ.

∴ **ಮಕ್ಷ** ರೇಷೆಯು **ವ**ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.

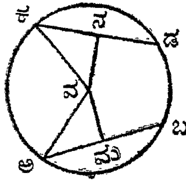
ಇನ್ನೊಂದು ಸಿದ್ಧತೆ:—**ಮಕ್ಷ** ರೇಷೆಯು **ಅಬ**ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವಿರುವದರಿಂದ ಅದು **ಅ** ಮತ್ತು **ಬ**ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವಿದೆ. ಪರಂತು **ವಅ** = **ವಬ** (ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

∴ **ವ** ಬಿಂದುವು **ಮಕ್ಷ**ದ ಮೇಲಿದೆ.

ಅಂದರೆ **ಮಕ್ಷ** ರೇಷೆಯು **ವ**ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.

ಪ್ರಮೇಯ ೪೬.

ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ (೧) ಸಮಾನ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವವು; ಮತ್ತು (೨) ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವವು.



(೧) **ಪಕ್ಷ**:—ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ವ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ; **ಅಬ, ಕಡ** ಇವು ಸಮಾನ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳಿವೆ. **ವಮ ⊥ ಅಬ; ವನ ⊥ ಕಡ.**

ಸಾಧ್ಯ :—**ವಮ = ವನ.**

ರಚನೆ :—**ವಅ, ವಕ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:—ವ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ **ಅಬ** ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ **ವಮ** ಲಂಬವಿದೆ.

∴ **ಅಮ** = ½ **ಅಬ**

ಅದರಂತೆ, **ಕನ** = ½ **ಕಡ** (**ವನ ⊥ ಕಡ**)

ಪರಂತು **ಅಬ = ಕಡ** (ಪಕ್ಷ)

∴ **ಅಮ = ಕನ**

ಇನ್ನು **ವಅಮ, ವಕನ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

{ ∠ **ವಮಅ**, ∠ **ವನಕ** ಕಾಟಕೋನಗಳು.
ವಅ = ವಕ (ತ್ರಿಜ್ಯಾ)
ಅಮ = ಕನ (ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದೆ)

∴ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇವೆ. (ಕಾ. ಕೋನ, ಕರ್ಣ, ಭುಜ)

∴ **ವಮ = ವನ.**

(೨) **ಪಕ್ಷ** :—ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ **ವ** ಕೇಂದ್ರವಿದೆ. **ಅಬ, ಕಡ** ಇವು ಅದರಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳಿವೆ. **ವಮ** ಇದು **ಅಬ** ದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು **ವನ** ಇದು **ಕಡ** ದ ಮೇಲೆ ಲಂಬಗಳಾಗಿದ್ದು, **ವಮ = ವನ.**

ಸಾಧ್ಯ :—ಅಬ = **ಕಡ**

ಸಿದ್ಧತೆ:—ವಅಮ, ವಕನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ

∠ **ವಮಅ,** ∠ **ವನಕ** ಕಾಟಕೋನಗಳಿವೆ (ಪಕ್ಷ)
ವಅ = ವಕ (ತ್ರಿಜ್ಯ)
ವಮ = ವನ (ಪಕ್ಷ)

∴ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇವೆ. (ಕಾ. ಕೋನ, ಕರ್ಣ, ಭುಜ)

∴ **ಅಮ = ಕನ**

ಪರಂತು **ಅಮ** = $\frac{1}{2}$ **ಅಬ** ಮತ್ತು **ಕನ** = $\frac{1}{2}$ **ಕಡ** (ಪ್ರ. ೪೪)

∴ **ಅಬ = ಕಡ.**

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೧ :— ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಮಾನ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಆಯಾ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವವು.

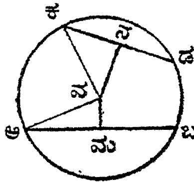
ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೨:— ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವವು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:—೪೪ ನೆಯ ಮತ್ತು ೪೫ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಯೋಗಮಾಡಿ ಸಿದ್ಧಮಾಡಬಹುದು.

* ಪ್ರಮೇಯ ೪೬ ಅ.

(೧) ವರ್ತುಳದ ಎರಡು ಅಸಮಾನ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯು ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕಿಂತ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಸಮೀಪ ವಾಗಿರುವದು.

(೨) ವರ್ತುಳದ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯು ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ವ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ; ಅಬ, ಕಡ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳಿವೆ. ವಮ $\perp$ ಅಬ; ವನ $\perp$ ಕಡ.

ಸಾಧ್ಯ:—(೧) ಅಬ $>$ ಕಡ ಇದ್ದರೆ ವಮ $<$ ವನ,

(೨) ವಮ $<$ ವನ ಇದ್ದರೆ ಅಬ $>$ ಕಡ.

ರಚನೆ:—ವಅ, ವಕ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:—ಅಮ = ೧/೨ ಅಬ; ಕನ = ೧/೨ ಕಡ.

ವಅ^2 = ವಕ^2 (ವಅ, ವಕ ತ್ರಿಜ್ಯ)

$\therefore$ ಅಮ^2+ವಮ^2=ಕನ^2+ವನ^2 [೧] (ಪಾಯಥಾಗೊರಸ)

*ಮುಂಬಯಿ ವಿದ್ಯಾಖಾತೆಯ ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಮಾವೇಶವಿಲ್ಲ.

(೧) ಅಬ > ಕಡ ಇದ್ದರೆ ಅಮ > ಕನ ಮತ್ತು ಅಮ^{೨} > ಕನ^{೨}.

∴ ವಮ^{೨} < ವನ^{೨} [೧] ರಿಂದ

∴ ವಮ < ವನ

(೨) ವಮ < ವನ ಇದ್ದರೆ ವಮ^{೨} < ವನ^{೨}

∴ ಅಮ^{೨} > ಕನ^{೨} [೧] ರಿಂದ

∴ ಅಮ > ಕನ ಮತ್ತು ೨ ಅಮ > ೨ ಕನ

∴ ಅಬ > ಕಡ.

ಉಪ ಸಿದ್ಧಾಂತ:— ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅದರ ವ್ಯಾಸವು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯಾಗಿರುವದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:—ಹಲವು ವರ್ತುಳಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ **ಸಮಕೇಂದ್ರ ವರ್ತುಳಗಳು** (Concentric circles) ಅಥವಾ **ಏಕಕೇಂದ್ರಿಯ ವರ್ತುಳಗಳು** ಅನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೨೬.

೧. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ೫ ಸೆ. ಮಿ. ಇದೆ. ಆ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ೮ ಸೆ. ಮಿ. ಉದ್ದವಿರುವ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಆದರೆ ಅದು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨. ೬ ಸೆ. ಮಿ. ಉದ್ದವಾದ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ೪ ಸೆ. ಮಿ. ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು. ಆದರೆ, ಆ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. ೬ ಸೆ. ಮಿ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ೨ ಸೆ. ಮಿ. ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದಳತೆ ಎಷ್ಟು?

೪. ೩ ಇಂಚು ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ೨ ಇಂಚು ಅಂತರ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಸಮಾನ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದಳತೆ ಎಷ್ಟು?

೫. ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ ೨.೪" ಮತ್ತು ೧" ಉದ್ದಳತೆಯ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ೦.೭" ಇಂಚು ಇದೆ. ಆದರೆ ಆ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೬. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವೆರಡು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಪ ಮತ್ತು ಫ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ ಅಬ ⊥ ಪಫ ಮತ್ತು ಅಬ ರೇಷೆಯು ಪಫ ರೇಷೆಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೭. ಕೊಟ್ಟ ಪ ಮತ್ತು ಫ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೮. ಉದಾ. ೭ ರ ಉತ್ತರವನ್ನು ಬಿಂದುಪಥಗಳ ಮೇಲಿನ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರಿ.

೯. ಮ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ಪಫ, ಪರ ಎಂಬ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮಪ ರೇಷೆಯು ∠ ಫಪರ ಇದನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಪಫ = ಪರ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೦. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಮ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವವು. ಆದರೆ ಆ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಮ ಇದು ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೧. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ, ಮತ್ತು ಪ, ಪ′ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಪ ದಿಂದ ಅಬ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಆ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಫ ಮತ್ತು ರ ಗಳಲ್ಲಿ ಪುನಃ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಫರ = ೨ ಅಬ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೨. ಎರಡು ಸಮಕೇಂದ್ರ ವರ್ತುಳಗಳ ಪರಿಘಗಳಿಂದ ಆದ, ಯಾವದೊಂದು ಸರಳ ರೇಷೆಯ ಪರಿಘದಲ್ಲಿಯ ಭಾಗಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವವು.

೧೩. ಕೊಟ್ಟ ಪ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಅಬ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿರುವ ಹಲವು ವರ್ತುಳಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ನಿಯತ ಫ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವವು ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಉದಾ. ೬ ನೋಡಿರಿ).

ಪ ದ ಸಹ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (೩, ೪) ಇದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಯ–ಅಕ್ಷವು ಅಬ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಫ ದ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಯಾವವು ?

೧೪. ವರ್ತುಳದ ಸಮಾನ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೫. ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಸಮಾಂತರ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಬಿಂದು ಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೬. ಅಬ, ಅಕ ಇವು ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು. ಅಬ ಮತ್ತು ಅಕ ಗಳ ಮೇಲೆ ಸಮಾನ ಅಂತರಛೇದ ಮಾಡುವ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಆ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೭. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡೂ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ತ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ತ ಇದು $\frac{೧}{೨}$ ಅಬ ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ರಚನೆಯು ಅಶಕ್ಯವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೮. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡೂ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಕಡ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಬ $\perp$ ಕಡ ಇದ್ದರೆ ಈ ರಚನೆಯು ಅಶಕ್ಯವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

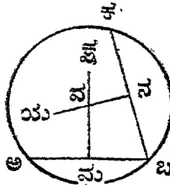
೧೯. ಕೊಟ್ಟದ್ದೊಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಪ ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿದೆ; ಪ ದಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಪ ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಣ್ಣದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಪ ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆ ಯಾವದು?

೨೦. (ವ್ಯಾಸಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದಿರುವ) ಒಂದು ಕೊಟ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಯ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳ ದಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯುವ ಭೂಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ರಚನೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ ೪೭.

ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿರದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳವು ಒಂದು ಇರುವದು; ಮತ್ತು ಅದೊಂದೇ ಇರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ಒಂದೇ ಸರಳರೇಷೆಯಲ್ಲಿರದ **ಅ, ಬ, ಕ** ಬಿಂದುಗಳಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ:—(೧) **ಅ, ಬ, ಕ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

(೨) ಇಂಥ ಒಂದೇಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಲಿಕ್ಕೆ ಬರುವದು.

(ಅಂದರೆ, ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು **ಅ, ಬ, ಕ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ ತೆಗೆಯಲಾಗಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ.)

ರಚನೆ:—ಅಬ, ಬಕ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳಾದ **ಮಕ್ಷ, ನಯ** ಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ;—ಅ, ಬ, ಕ ಇವು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವದಿಲ್ಲ.

∴ **ಮಕ್ಷ, ನಯ** ಇವು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳಲ್ಲ.

∴ **ಮಕ್ಷ, ನಯ** ಇವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವವು;
ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು **ಒಂದೇ** ಇರುವದು.

ಅದನ್ನು **ವ** ಎಂದು ಕರೆಯಿರಿ.

ಮಕ್ಷ ಇದು **ಅಬ** ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕವಿದೆ.

∴ **ಮಕ್ಷ** ದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವು **ಅ, ಬ** ದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರಂತೆ **ನಯ** ದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವು **ಬ, ಕ** ದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

(೧) **ವ** ಬಿಂದುವು **ಮಕ್ಷ** ದ ಮೇಲಿದೆ ∴ **ವಅ = ವಬ**

ವ ,, **ನಯ** ದ ,, ∴ **ವಬ = ವಕ**

∴ **ವಅ = ವಬ = ವಕ**

∴ **ವ** ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು **ವಅ** ತ್ರಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದ ವರ್ತುಳವು **ಅ, ಬ, ಕ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವದು.

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ವರ್ತುಳವು **ಅ, ಬ, ಕ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.

(೨) ಇನ್ನು ಇಂಥ **ಒಂದೇ** ವರ್ತುಳ ಇರುವದೆಂದು ತೋರಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಅ, ಬ ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು **ಮಕ್ಷ** ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವವು.

ಅದರಂತೆ, **ಬ, ಕ** ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು **ನಯ** ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವವು.

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಅ, ಬ, ಕ** ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲಾ **ಮಕ್ಷ** ಮತ್ತು **ನಯ** ಈ ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಪರಂತು, **ಮಕ್ಷ, ನಯ** ಈ ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಇರುವದು ಶಕ್ಯವಿದೆ. ಅಂದರೆ ಅದು **ವ** ಛೇದನ ಬಿಂದು ಆಗಿರುವದು.

∴ **ಅ, ಬ, ಕ** ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ **ವ** ಇದೊಂದೇ ಬಿಂದುವಿದೆ.

∴ **ಅ, ಬ, ಕ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಒಂದೇಒಂದು ವರ್ತುಳ ಇರುವದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೧:— ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಎಲ್ಲ ವರ್ತುಳಗಳು ಪೂರ್ಣಮೀಲನ (Coincident) ಅಥವಾ ಅಭಿನ್ನ ಇರುವವು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೨:— ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಎರಡ ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಾರವು.

ಯಾಕಂದರೆ, ಅವುಗಳ ಮೂರು ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳಿದ್ದರೆ, ಆ ವರ್ತುಳಗಳು ಅಭಿನ್ನವಾಗಿರುವವು. ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರಲು ಶಕ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೩:— ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪರಿಘದ ವರೆಗೆ ವಅ, ವಬ, ವಕ ಹೀಗೆ ಮೂರು ಸಮಾನ ರೇಷೆಗಳಿದ್ದರೆ, ಆ ವರ್ತುಳ ದಲ್ಲಿ ವ ಇದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವದು.

೨೫ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

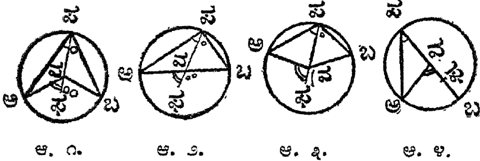
ವರ್ತುಳ ಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು

[ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿಯ ೧೦೪, ೧೦೫ ಪುಟ ನೋಡಿರಿ.]

ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ವ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ; ಅಬ ವರ್ತುಳ ಕಂಸವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಅವಬ ಕೋನಕ್ಕೆ** ಅಬ ಕಂಸದ ಮೇಲಿನ **ಕೇಂದ್ರಕೋನ** ಅನ್ನುವರು.

ಪ್ರಮೇಯ ೪೮.

ವರ್ತುಳದ ಯಾವದೊಂದು ವಿವಕ್ಷಿತ ಕಂಸದ ಮೇಲಿನ ಕೇಂದ್ರ ಕೋನವು, ಆ ಕಂಸದ ಮೇಲಿನ ಪರಿಘ ಕೋನದ ಇಮ್ಮಡಿ ಇರುವದು.



ಆ. ೧. ಆ. ೨. ಆ. ೩. ಆ. ೪.

ಪಕ್ಷ:— **ಅಬ** ಇದೊಂದು ವರ್ತುಳ ಕಂಸವಿದೆ. ಮತ್ತು **ವ** ಇದು ಆ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ. ಕಂಸವನ್ನುಳಿದು ಪರಿಘದ ಯಾವದೊಂದು ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ **ಪ** ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— ∠ **ಅವಬ** = ೨ ∠ **ಅಪಬ.**

ರಚನೆ:— **ಪವ** ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಮತ್ತು ಅದನ್ನು **ಫ** ದ ವರೆಗೆ ಬೆಳಿಸಿರಿ.

(ಆ. ೪ ರಲ್ಲಿ **ಫ** ಬಿಂದು **ವಬ** ದಲ್ಲಿ ಬರುವದು.)

ಸಿದ್ಧತೆ:— △ **ಅಪವ** ಇದರ

∠ **ಅವಫ** ಇದು ಬಹಿಃಕೋನ = ∠ **ವಅಪ** + ∠ **ವಪಅ**

ಆದರೆ, **ವಅ** = **ವಪ** (ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು.)

∴ ∠ **ವಅಪ** = ∠ **ವಪಅ**

∴ ∠ **ಅವಫ** = ೨ ∠ **ವಪಅ**

(ಆ. ೪ ರಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧತೆಯು ಪೂರ್ಣ ಆಗುವದು.)

ಅದರಂತೆ, **∠ಬವಫ = ೨∠ವಪಬ** ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

∴ ಆ. ೧, ೨, ೩ ರಲ್ಲಿ

∠ಅವಫ + ∠ಬವಫ = ೨∠ವಪಅ + ೨∠ವಪಬ.

∴ **ಅವಬ = ೨∠ಅಪಬ**

ಆ. ೫ ರಲ್ಲಿ

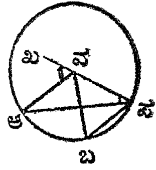
∠ಬವಫ − ∠ಅವಫ

= ೨∠ವಪಬ − ೨∠ವಪಅ

∴ ∠ಅವಬ = ೨∠ಅಪಬ

∴ ಎಲ್ಲ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ,

∠ಅವಬ = ೨∠ಅಪಬ.



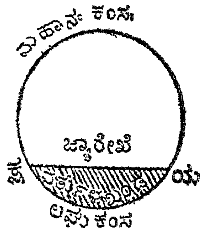
ಆ. ೫.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ:— ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು ಕಾಟಕೋನ ಇರುವದು. (ಆ. ೨ ನೋಡಿರಿ.)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು.

ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗದಂಥ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯು ಆ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘ ವಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದು. ಅದರಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಭಾಗಕ್ಕೆ **ಮಹಾನ್ ಕಂಸ** ಅಥವಾ **ಬೃಹತ್ ಕಂಸ** (Major arc) ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ಭಾಗಕ್ಕೆ **ಲಘು ಕಂಸ** (Minor arc) ಅನ್ನುವರು.

ಈ ಎರಡು ಕಂಸಗಳಿಗೆ ಪರಸ್ಪರ **ಸಂಬಂಧಿ ಕಂಸ** ಅಥವಾ **ಪೂರಕ ಕಂಸ** (Conjugate arcs) ಅನ್ನುವರು.



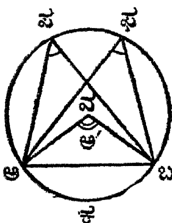
ಮಹಾನ್ ಕಂಸ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆ ಇವುಗಳಿಂದ ಮರ್ಯಾದಿತವಾದ ವರ್ತುಳದ ಭಾಗಕ್ಕೆ **ಮಹಾನ್ ವರ್ತುಳ ಖಂಡ** (Major Segment) ಅನ್ನುವರು. ಮತ್ತು ಲಘು ಕಂಸ ಹಾಗು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಮರ್ಯಾದಿತವಾದ ವರ್ತುಳ ಭಾಗಕ್ಕೆ **ಲಘು ವರ್ತುಳ ಖಂಡ** ಅನ್ನುವರು.

ಪ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅ ಮತ್ತು ಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ∠ **ಅಪಬ** ಇವಕ್ಕೆ **ಅಬ** ಮೇಲಿನ **ಪ** ಹತ್ತರದ ಕೋನವೆನ್ನುವರು.

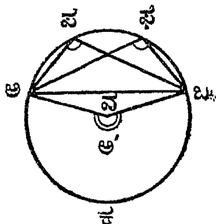
ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳ ಖಂಡದ ಕಂಸದ ಮೇಲೆ ಯಾವದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ **ಪ** ಬಿಂದುವನ್ನು ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಪ ದ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಆ **ವರ್ತುಳ ಖಂಡದಲ್ಲಿಯ ಕೋನ** (Angle in the Segment) ಅನ್ನುವರು. ಮುಂದೆ ಬರುವ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಈ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ ೪೯.

ಒಂದೇ ವರ್ತುಳ ಖಂಡದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವವು.



ಆ. ೧.



ಆ. ೨.

ಪಕ್ಷ:— **ಅಪಫಬ** ವರ್ತುಳ ಖಂಡದ **ಅಬ** ಇದು ಜ್ಯಾ ರೇಷೆ. ಮತ್ತು ಅದರ ಕಂಸದ ಮೇಲೆ **ಪ** ಮತ್ತು **ಫ** ಬಿಂದುಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ **ಅಪಬ** ಮತ್ತು **ಅಫಬ** ಕೋನಗಳಿವೆ. **ವ** ಇದು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರವು, ಮತ್ತು **ಅಕಬ** ಕಂಸವು, ವರ್ತುಳ ಖಂಡದ **ಅಪಬ** ಕಂಸದ ಪೂರಕವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ :— $\angle$ ಅಪಬ = $\angle$ ಅಫಬ.

ರಚನೆ :— ವಅ, ವಬ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ :— ಅಕಬ ಕಂಸದ ಮೇಲೆ ವ ಕೇಂದ್ರದ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಅವಬ ಇದೊಂದು ಕೋನವಿದೆ. (ಅದನ್ನು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಅ′ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದೆ.) ಮತ್ತು ಈ ಕೋನವು ಪೂರಕ ಕಂಸದಲ್ಲಿಯ ಪ ಇಲ್ಲವೆ ಫ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನದ ಇಮ್ಮಡಿ ಇದೆ.

∴ $\angle$ ಅ′ = ೨ $\angle$ ಅಪಬ; $\angle$ ಅ′ = ೨ $\angle$ ಅಫಬ

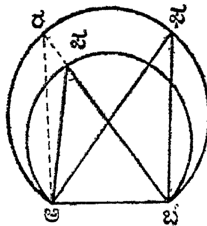
∴ ೨ $\angle$ ಅಪಬ = ೨ $\angle$ ಅಫಬ

∴ $\angle$ ಅಪಬ = $\angle$ ಅಫಬ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:— ಈ ಸಿದ್ಧತೆಯು ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಹೋಲುವದು. ಪ್ರಮೇಯ ೪೮ರ ಮೇಲಿಂದ ಈ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದೆ; ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ ೪೮ರ ಎಲ್ಲ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಹೋಲುವಂತೆ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ ೫೦ (ಪ್ರಮೇಯ ೪೯ ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ರೇಷೆಯ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ ಇರುವ ಬೇರೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಆ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ ಆ ನಾಲ್ಕೂ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇರುವವು.



ಪಕ್ಷ :— **ಅಬ** ರೇಷೆಯ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ **ಪ, ಫ** ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಮತ್ತು ∠ **ಅಪಬ** ಮತ್ತು ∠ **ಅಫಬ** ಇವು **ಅಬ** ಮೇಲೆ **ಪ, ಫ** ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ :— **ಅ, ಪ, ಫ, ಬ** ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇರುವವು.

ಸಿದ್ಧತೆ :— **ಅ, ಪ, ಬ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳವಿದೆ.

ಅ, ಫ, ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳವಿದೆ.

ಇಂಥ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅವು

(೧) ಪೂರ್ಣತ್ವದಿಂದ ಅಭಿನ್ನವಾಗಿರುವವು; ಅಥವಾ

(೨) ಅವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಗಿರುವವು.

(೧) ಅವು ಅಭಿನ್ನಗಳಿದ್ದರೆ ಸಾಧ್ಯವು ಸಿದ್ಧ ಆಗುವದು.

(೨) ಅವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, **ಅಪಬ** ಮತ್ತು **ಅಫಬ** ಈ ಎರಡು ವರ್ತುಳ ಖಂಡಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ಪೂರ್ಣತ್ವದಿಂದ ಒಳ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬೀಳುವದು. ಯಾಕೆಂದರೆ, **ಅ, ಬ** ಬಿಂದುಗಳ ಹೊರತು ಆ ಕಂಸಗಳಿಗೆ ಸಾಧಾರಣವಾದ ಬೇರೆ ಬಿಂದು ಇರಲಾರದು.

ಅಪಬ ಇದು **ಅಫಬ** ದ ಒಳಬದಿಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ಬಪ ಬೆಳಿಸಿರಿ; ಅಂದರೆ ಅದು **ಅಫಬ** ಕಂಸವನ್ನು **ರ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಅರ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ, ∠ **ಅರಬ** = ∠ **ಅಫಬ** (ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಕೋನ)

ಪರಂತು ∠ **ಅಪಬ** = ∠ **ಅಫಬ** (ಪಕ್ಷ)

∴ ∠ **ಅಪಬ** = ∠ **ಅರಬ.**

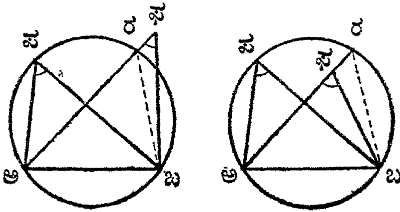
ಪರಂತು △ **ಅರಪ** ದ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವು **ಅಪಬ** ಇದೆ. ಮತ್ತು **ಅರಬ** ಇದು ಅಂತರವಿರುದ್ಧ ಕೋನವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಲಾರವು.

ಅಪಕ್ಕಾಗಿ **ಅಪಬ** ಮತ್ತು **ಅಫಬ** ಇವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವರ್ತುಳಗಳಾಗಿ ರುವದು ಶಕ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಅಂದರೆ, **ಅಪಬ**, **ಅಫಬ** ಇವು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳ.

ಅಂದರೆ, **ಅ**, **ಪ**, **ಫ**, **ಬ** ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿರುವವು.

ಪ್ರಮೇಯ ೩೦ ರ ಮೇಲಿನ ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು.



ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಕೆಲವರು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡುವದುಂಟು:— ಒಂದು ವರ್ತುಳವು **ಅ**, **ಪ**, **ಬ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು. ಈ ವರ್ತು ಳವು **ಫ** ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗದಿದ್ದರೆ, ಅದು **ಅಫ** ಇಲ್ಲವೆ ಬೆಳಿಸಿದ **ಅಫ** ಇದನ್ನು **ರ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವದು. * **ಬರ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ, $\angle$ **ಅರಬ** = $\angle$ **ಅಪಬ** (ಒಂದೇ ವರ್ತುಳ ಖಂಡದಲ್ಲಿ)
= $\angle$ **ಅಫಬ** (ಪಕ್ಷ)

ಅರಬ, **ಅಫಬ** ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು Δ **ಬಫರ** ಇದರ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವು. ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಆಂತರ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನವು ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಅವು ಸಮಾನವಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ **ಅಪಬ** ವರ್ತುಳವು **ಫ** ದಲ್ಲಿಯೂ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.

ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ * ಈ ಗುರುತಿನಿಂದ ತೋರಿಸಿದ ಅನುಮಾನವು ಅಪೂ ರ್ಣವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಿದ್ಧತೆಯು ಅಪೂರ್ಣವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಯಾಕೆಂದರೆ **ಕ, ಫ** ಬಿಂದುಗಳು **ಅಬ** ದ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗಿರುವದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಗತಿಗಳು ಸಂಭವಿಸುವವು:—

(೧) **ಅಫ** ಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲವೆ ಬೆಳಿಸಿದ **ಅಫ** ಕ್ಕೆ ವರ್ತುಳವು ಛೇದಿಸಬಹುದು; ಇಲ್ಲವೆ,

(೨) **ಫಅ** ರೇಖೆಯನ್ನು ಅ ದ ಹೊರಗೆ ಬೆಳಿಸಿದರೆ ಅಲ್ಲಿಯೂ ಈ ವರ್ತುಳವು ಛೇದಿಸಬಹುದು; ಅಥವಾ

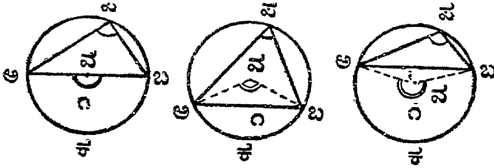
(೩) ವರ್ತುಳವು **ಅಫ** ರೇಖೆಯನ್ನು ಅ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡಬಹುದು (ಅಂದರೆ **ಅಫ** ಇದು ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ ಇರಬಹುದು).

ಮೇಲಿನ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿ ಕೇವಲ (೧) ಇದೊಂದೇ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದೆ. ಪರಂತು ಸಿದ್ಧತೆಯು ಪೂರ್ಣ ಆಗಲಿಕ್ಕೆ (೨) ಮತ್ತು (೩) ಇವುಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನೂ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು. ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಬಹುದು. ಆದರೂ ಈ ಪ್ರಕಾರದ ಸಿದ್ಧತೆಯು ನಿಮಗೆ ಉದ್ದುದ್ದವಾಗಿ ತೋರಬಹುದು.

೫೩ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿ "**ಅ, ಬ, ಕ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳವು **ಡ** ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗದಿದ್ದರೆ, ಅದು **ಕಡ** ರೇಖೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ಬೆಳಿಸಿದ **ಕಡ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಈ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು" ಹೀಗೆಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿಯೂ ಮೇಲಿನಂತೆ ಆಕ್ಷೇಪ ಉಂಟು.

ಪ್ರಮೇಯ ೫೧.

ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು ಕಾಟಕೋನವಿರುವದು; ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ವರ್ತುಳ ಖಂಡದಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು ಕಾಟಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದಿರುವದು; ಮತ್ತು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣ ವರ್ತುಳಖಂಡದಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು ಕಾಟಕೋನಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುವದು.



ಪಕ್ಷ :— **ಅಪಬಕ** ವರ್ತುಳದ **ಅಪಬ** ವರ್ತುಳ ಖಂಡವಿದೆ; **ವ** ಕೇಂದ್ರವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ :— (೧) **ಅಪಬ**=ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳವಿದ್ದರೆ $\angle$ **ಅಪಬ**=೧ ಕಾಟಕೋನ

(೨) **ಅಪಬ** $>$,, $\angle$ **ಅಪಬ** $<$,,

(೩) **ಅಪಬ** $<$,, $\angle$ **ಅಪಬ** $>$,,

ರಚನೆ :— **ಅಪಬ** ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳ ಇರದಿದ್ದರೆ, **ಅವ, ಬವ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— (**ಅಪಬ** ಕಂಸದ ಪೂರಕ) ಕಂಸ **ಅಕಬ** ಇದರ ಮೇಲಿನ **ವ** ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ **ಅವಬ** ಕೋನಕ್ಕೆ $\angle$೧ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ,

$\angle$೧ = ೨ $\angle$ **ಅಪಬ.**

(೧) **ಅಪಬ** ಇದು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳವಿದ್ದರೆ, **ಅಬ** ಇದು ವರ್ತುಳ ವ್ಯಾಸವಿದೆ; ಮತ್ತು $\angle$೧ = ೨ ಕಾಟಕೋನ.

$\therefore$ $\angle$ **ಅಪಬ** = ೧ ಕಾಟಕೋನ.

(೨) ಅಪಬ ವರ್ತುಳ ಖಂಡ > ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳ ಇದ್ದರೆ,

$\angle$೧ < ೨ ಕಾಟಕೋನ,

$\therefore$ $\angle$ **ಅಪಬ** < ೧ ಕಾಟಕೋನ.

(೩) ಅಪಬ ವರ್ತುಳ ಖಂಡ < ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳ ಇದ್ದರೆ,

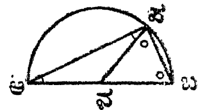
$\angle$೧ > ೨ ಕಾಟಕೋನ,

$\therefore$ $\angle$ **ಅಪಬ** > ೧ ಕಾಟಕೋನ.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೋರಿಸಬಹುದು.

"ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು ಕಾಟಕೋನ ಇರುವದು; ಮಹಾನ ವರ್ತುಳ ಖಂಡದಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು ಲಘು ಕೋನ ಇರುವದು; ಮತ್ತು ಲಘು ವರ್ತುಳ ಖಂಡದಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು ವಿಶಾಲ ಕೋನ ಇರುವದು."

"ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು ಕಾಟಕೋನ ಇರುವದು." ಇದರ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸ್ವತಂತ್ರ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು.



ಸಿದ್ಧತೆ:— ವಪ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ವಪ = **ವಅ** (ತ್ರಿಜ್ಯ)

$\therefore$ $\angle$ **ವಪಅ** = $\angle$ **ವಅಪ**

ವಪ = **ವಬ** (ತ್ರಿಜ್ಯ)

$\therefore$ $\angle$ **ವಪಬ** = **ವಬಪ** $\therefore$ $\angle$ **ಅಪಬ** = $\angle$ **ಅಪವ** + $\angle$ **ವಪಬ**

= $\angle$ **ವಅಪ** + $\angle$ **ವಬಪ**

ಪರಂತು, $\angle$ **ಅಪಬ**, $\angle$ **ವಅಪ**, $\angle$ **ವಬಪ** ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೨ ಕಾಟಕೋನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಿದೆ. ಯಾಕಂದರೆ ಇವು $\triangle$ **ಅಪಬ** ದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

$\therefore$ **ಅಪಬ** = $\frac{೧}{೨}$ (೨ ಕಾಟಕೋನ)

= ೧ ಕಾಟಕೋನ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು

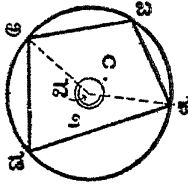
ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘವು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖಾಕೃತಿಯ **ಎಲ್ಲ** ಕೋನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಆ ಸರಳ ರೇಖಾಕೃತಿಯ **ಪರಿವೃತ್ತ** (Circumscribed circle or Circumcircle) ಅನ್ನುವರು; ಮತ್ತು ಆ ಸರಳ ರೇಖಾಕೃತಿಯು **ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ** ಅಥವಾ **ವೃತ್ತಗತ** (inscribed in a circle or Cyclic) ಇರುವದು ಎಂದೆನ್ನುವರು.

ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ತೆಗೆಯಬಹುದು. (ಪ್ರಮೇಯ ೪೭ ನೋಡಿರಿ.) ಈ ವರ್ತುಳವು ಅದರ **ಪರಿವೃತ್ತ** ಆಗುವದು. ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ **ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯ** (Circumradius) ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ **ಪರಿಕೇಂದ್ರ** (Circumcentre) ಅನ್ನುವರು.

ಸರಳ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದ ಕಡೆಗೆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದೆಂದು ನಿಶ್ಚಯವಾಗಿ ಹೇಳಲಿಕ್ಕೆ ಬರಲಾರದು. ಪರಂತು ಆ ಕೊಟ್ಟ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಲಿಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು **ಏಕವೃತ್ತೀಯ** ಅಥವಾ **ವೃತ್ತಸ್ಥ** (Concyclic) ಇರುವದು, ಎಂದು ಅನ್ನುವರು.

ಪ್ರಮೇಯ ೫೨.

ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನದ ಎದುರುಬದುರಿನ ಕೋನಗಳು ಪೂರಕ ಇರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ವ ಇದು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— ∠ಬ + ∠ಡ = ೨ ಕಾಟಕೋನ.
∠ಅ + ∠ಕ = ೨ ಕಾಟಕೋನ.

ರಚನೆ:— ವಅ, ವಕ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ಅಬಕ ಕಂಸದಲ್ಲಿಯ ವ ಬಳಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನಕ್ಕೆ ∠೧ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.
ಅಡಕ ಕಂಸದಲ್ಲಿಯ ವ ಬಳಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನಕ್ಕೆ ∠೨ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಅಂದರೆ ∠೧ = ೨∠ಅಡಕ
∠೨ = ೨∠ಅಬಕ

∴ ∠೧ + ∠೨ = ೨(∠ಅಡಕ + ∠ಅಬಕ).

ಪರಂತು ∠೧ + ∠೨ = ೪ ಕಾಟಕೋನ

∴ ∠ಅಡಕ + ಅಬಕ = ೨ ಕಾಟಕೋನ.

ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿಯ ೪ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು ೪ ಕಾಟಕೋನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಿರುವದು.

∴ ∠ಬಅಡ + ∠ಬಕಡ = ೨ ಕಾಟಕೋನ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:— ವ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಎರಡು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಕೋನವು ೨ ∠ ಬ ಇವಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುವದು ಮತ್ತು ಯಾವ ಕೋನವು ೨ ∠ ಡ ಇವಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುವದು ಎಂಬವನ್ನು ಈ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತೋರಿಸಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಆ ಕೋನಗಳಿಗೆ ∠೧ ಮತ್ತು ∠೨ ಹೀಗೆ ಗುರುತಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಕೇವಲ ∠ ಅವಬ ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ, ವ ದ ಬಳಿಯಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಕೋನದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ, ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟ ಹೇಳಿದಂತಾಗುವದಿಲ್ಲ; ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಯೋಜನೆ ಮಾಡಿದೆ.

ಎರಡನೆಯ ಸಿದ್ಧತೆ:—

ಅಕ, ಬಡ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

∠ **ಅಬಡ** = ∠ **ಅಕಡ** (ಒಂದೇ ವರ್ತುಳ ಖಂಡದ ಕೋನ)

∠ **ಕಬಡ** = ∠ **ಕಅಡ** (,, ,, ,,)

ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿದರೆ,

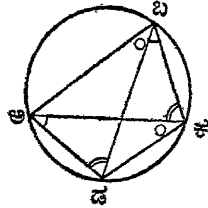
∠ **ಅಬಕ** = ∠ **ಅಕಡ** + ∠ **ಕಅಡ**

∴ ∠ **ಅಬಕ** + ∠ **ಅಡಕ**

= ∠ **ಅಕಡ** + ∠ **ಕಅಡ** + ∠ **ಅಡಕ**

= △ **ಅಕಡ** ಇದರ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು

= ೨ ಕಾಟಕೋನ.



ಪುನಃ ∠ **ಬಕಅ** = ∠ **ಅಡಬ** !

∴ ∠ **ಬಕಡ** = ∠ **ಬಕಅ** + ∠ **ಅಕಡ.**

= ∠ **ಬಡಅ** + ∠ **ಅಬಡ.**

∴ ∠ **ಬಕಡ** + ∠ **ಬಅಡ** = ∠ **ಬಡಅ** + ∠ **ಅಬಡ** + ∠ **ಬಅಡ**

= △ **ಅಬಡ** ದ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು.

= ೨ ಕಾಟಕೋನ.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ:—ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗದ ಚೌಕೋನದ್ದೊಂದು ಭುಜವನ್ನು ಬೆಳಿಸಿ ಉಂಟಾದ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವು ಆ ಚೌಕೋನದ ಅಂತರ ವಿರುದ್ಧ (Interior opposite) **ಕೋನಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುವದು.**

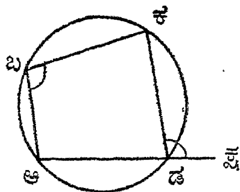
ಉದಾಹರಣಾರ್ಥವಾಗಿ, ಅಬಕಡ ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನದ ಅಡ ಭುಜವನ್ನು ಕ್ಷದ ವರೆಗೆ ಬೆಳಿಸಿದೆ.

∠ ಕಡಕ್ಷ = ∠ ಅಬಕ

ಯಾಕಂದರೆ,

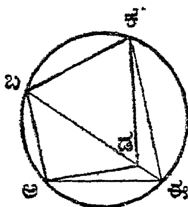
∠ ಕಡಕ್ಷ = ∠ ಕಡಅದ ಪೂರಕ.

= ∠ ಅಬಕ.

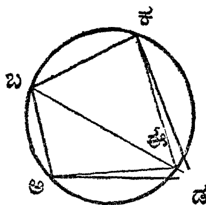


ಪ್ರಮೇಯ ೫೪. (ಪ್ರ. ೫೨ ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)

ಚೌಕೋನದ ಎದುರು ಬದುರಿನ ಕೋನಗಳು ಪೂರಕ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಚೌಕೋನವು ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಇರುವದು.



ಆ. ೧.



ಆ. ೨.

ಪಕ್ಷ:— ಅಬಕಡ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ, ∠ ಅಬಕ + ∠ ಅಡಕ = ೨ ಕಾಟಕೋನ.

ಸಾಧ್ಯ:— ಅ, ಬ, ಕ, ಡ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘದ ಮೇಲಿರುವವು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ಅ, ಬ, ಕ ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಈ ವರ್ತುಳವು ಡ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದಿಲ್ಲೆಂದು ತಿಳಿದರೆ, ಬಡ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಬಡ ರೇಷೆಯು **ಅಬಕ** ಕೋನದ ನಡುವೆ ಇರುವದರಿಂದ **ಬಡ**, ಅಥವಾ ಬೆಳಿಸಿದ **ಬಡ** ಇದು ವರ್ತುಳದ ಯಾವದೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಛೇದಿಸಲೇಬೇಕು. ಆ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿಗೆ **ಈ** ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. **ಅಈ**, **ಕಈ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಇನ್ನು, **ಅಬಕಈ** ಇದು ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

∴ ∠**ಅಬಕ** + ∠**ಅಈಕ** = ೨ ಕಾಟಕೋನ

ಮತ್ತು ∠**ಅಬಕ** + ∠**ಅಡಕ** = ೨ ಕಾಟಕೋನ (ಪಕ್ಷ)

∴ ∠**ಅಈಕ** = ∠**ಅಡಕ** .... (೧)

ಪರಂತು, ಆ. ೧ರಲ್ಲಿ,

△ **ಅಈಡ**ದ ಬಹಿರ್ ಕೋನವು ∠**ಅಡಬ** > ಆ. ವಿ. ∠**ಅಈಡ**

△ **ಕಈಡ**ದ „ „ ∠**ಕಡಬ** > „ ∠**ಕಈಡ**

∴ ∠**ಅಡಬ** + ∠**ಕಡಬ** > ∠**ಅಈಡ** + ∠**ಕಈಡ**

∴ ∠**ಅಡಕ** > ∠**ಅಈಕ**

ಇದು (೧) ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಿದೆ.

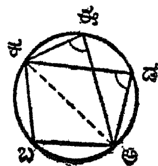
ಅದರಂತೆ, ಆ. ೨ರಲ್ಲಿ, ∠**ಅಡಕ** < ∠**ಅಈಕ** ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಆದಾದರೂ (೧) ಇದರ ವಿರುದ್ಧವಿದೆ.

∴ **ಅಬಕ** ವರ್ತುಳವು **ಡ**ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಗೃಹೀತ ಹಿಡಿಯುವದು ತಪ್ಪಾಗುವದು.

∴ **ಅ**, **ಬ**, **ಕ**, **ಡ** ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿರುವವು.

ಎರಡನೆಯ ಸಿದ್ಧತೆಯು (ಪ್ರಮೇಯ ೫೦ ರ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಿಸಿದ):

ಅಬಕ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಅಬಕ ಕಂಸದ ಪೂರಕ ಕಂಸದ ಮೇಲೆ **ಈ** ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅಂದರೆ, **ಡ**, **ಈ** ಇವು **ಅಕ** ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ ಬರುವವು. **ಈಕ**, **ಈಅ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ, $\angle$ ಬ + $\angle$ ಡ = ೨ ಕಾಟಕೋನ (ಪಕ್ಷ)

$\angle$ ಬ + $\angle$ ಈ = ೨ ಕಾಟಕೋನ (ಅಬಕಈ ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ)

$\angle$ ಡ = $\angle$ ಈ

$\therefore$ ಅಕ ಜ್ಯಾರೇಷೆಯ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ **ಡ, ಈ** ಬಿಂದುಗಳಿದ್ದು, **ಅಕ**ದ ಮೇಲಿನ ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಬಳಿಯಲ್ಲಿದ್ದ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.

$\therefore$ **ಅ, ಕ, ಈ, ಡ** ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿರುವವು.

ಅಂದರೆ, **ಡ** ಬಿಂದುವು **ಅಕಈ** ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿದೆ.

ಪರಂತು, **ಅಬಕ, ಅಕಈ** ಇವು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳಗಳುಳ್ಳವು.

$\therefore$ **ಡ** ಬಿಂದುವು **ಅಬಕ** ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿದೆ.

ಅಂದರೆ, **ಅಬಕಡ** ಇದು ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನ ಇರುವದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ :—ಚೌಕೋನದ್ದೊಂದು ಭುಜವನ್ನು ಬೆಳಿಸಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವು ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ಅಂತರವಿರುದ್ಧ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ, ಆ ಚೌಕೋನವು ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಇರುವದು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ :—ಪ್ರಮೇಯ ೫೦ ರಲ್ಲಿಯ ಟಿಪ್ಪಣಿ ನೋಡಿರಿ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೨೭.

೧. ಮ ಇದೊಂದು $\triangle$ ಅಬಕ ಇದರ ಪರಿಮಧ್ಯವಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ :—

(೧) $\angle$ ಅ ಲಘುಕೋನ ಇದ್ದರೆ $\angle$ ಮಬಕ = ೯೦° − $\angle$ ಅ.

(೨) $\angle$ ಅ ವಿಶಾಲಕೋನ ಇದ್ದರೆ $\angle$ ಮಬಕ = $\angle$ ಅ − ೯೦°.

೨. ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು ವ್ಯಾಸವೆಂದು ತಿಳಿದು, ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅದು ತಳರೇಷೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.

೩. ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾಂತರ ಇದ್ದರೆ, ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ, ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಸಮಲಂಬವು ಸಮದ್ವಿಭುಜವಿರುವದು.

೪. ಅಬ ವ್ಯಾಸವು ಪಫ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದು. ಬಪ ‖ ಅಫ ಇದ್ದರೆ ಪಫ ಇದೂ ವ್ಯಾಸವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಮ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೆಗೆದ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ, ಕಡ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಕಾಟಕೋನದಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವವು. ಆದರೆ ∠ ಅಮಡ + ಬಮಕ = ೨ ಕಾಟಕೋನ, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೬. △ ಅಬಕ ದ ಅ, ಬ, ಕ ಕೋನಗಳ ಅಂತರ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ, ಫ, ರ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ △ ಪಫರ ಇದರ ಕೋನಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು, △ ಅಬಕ ದ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರಿ.

೭. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಅಡ ⊥ ಬಕ ಮತ್ತು ಬಈ ⊥ ಅಕ. ಅಡ, ಬಈ ಇವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಪ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. △ ಅಬಕ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಅಡ ರೇಷೆಯು ಫ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ, ∠ ಡಬಪ = ∠ ಡಬಫ ಮತ್ತು ಪಡ = ಡಫ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೮. ಅಬಕಡ ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನದ ಅಬ ಮತ್ತು ಅಡ ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಕ ರೇಷೆಯು ಬಕಡ ಕೋನವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೯. ಅಬಕಡ ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ಅಬ = ಕಡ ಇದ್ದರೆ ಬಕ ‖ ಅಡ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೦. ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನದ ಅಬ, ಡಕ ಎದುರುಬದುರಿನ ಭುಜಗಳನ್ನು ಬೆಳಿಸಿದರೆ, ಅವು ಪ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವವು. ಆದರೆ △ ಪಅಡ ಮತ್ತು △ ಪಕಬ ಇವು ಮಿಥಃ ಸಮಕೋನವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೧. ಅಬಕ ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಮ ಇದು ಪರಿಮಧ್ಯವಿದೆ. ಮ ದಿಂದ ಬಕ ದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬವನ್ನು ಬೆಳಿಸಿದರೆ ಅದು ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಪ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ, ಮಪಬ ಮತ್ತು ಮಪಕ ಇವೆರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಭುಜ ಮತ್ತು ಏಕರೂಪ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೨. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಅ ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯು ಅವುಗಳ ಪರಿಘವನ್ನು ಪ ಮತ್ತು ಫ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ಪಅಫ ರೇಖೆಯನ್ನು ಯಾವದೇ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೂ, ∠ ಪಬಕ ದ ಬೆಲೆಯು ಹಾಗೇ ಉಳಿಯುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೩. ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ವ್ಯಾಸವಾಗುವಂತೆ ತೆಗೆದ ವರ್ತುಳಗಳು ಮೂರನೆಯ ಭುಜದಲ್ಲಿ (ಅಥವಾ ಬೆಳಿಸಿದ ಮೂರನೆಯ ಭುಜದಲ್ಲಿ) ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವವು.

೧೪. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ, ಕಡ ಇವು ಸಮಾನ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ನ, ಮ ಇವು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು. ಆದರೆ ನಮ ರೇಖೆಯು ಆ ಎರಡೂ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೫. ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನದ ಎರಡೂ ಕರ್ಣಗಳು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆ ಚೌಕೋನವು ಆಯತವಾಗಿರುವದು.

೧೬. ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವು ಆಯತವಾಗಿರು ವದು.

೧೭. ಅಬಕಡಈಫ ಇದು ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಷಟ್‌ಕೋನವಿದೆ. ಆದರೆ ∠ ಅಬಕ+ ∠ ಕಡಈ+ ∠ ಈಫಅ= ∠ ಬಕಡ+ ∠ ಡಈಫ+ ∠ ಫಅಬ, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬದಿಯು ೪ ಕಾಟಕೋನಗಳಿಗೆ ಸರಿ ಎಂಬು ತೋರಿಸಿರಿ.]

೧೮. ಎರಡು ಅಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಅಪ, ಅಫ ಇವು ಅ ದಿಂದ ಹೊರಟ ಆ ವರ್ತುಳಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳಿವೆ. ಆದರೆ, ಪ, ಬ, ಫ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿವೆ. ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೯. ಒಂದು ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿದ್ದ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಎಲ್ಲ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಕಾರಗಳ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ:

ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವು, (೧) ವರ್ತುಳದ ಒಳಬದಿಯಲ್ಲಿರುವಾಗ;
(೨) ವರ್ತುಳದ ಹೊರಬದಿಯಲ್ಲಿರುವಾಗ;
ಮತ್ತು (೩) ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿರುವಾಗ.

೨೦. ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಸ್ಥಾನವನ್ನೂ, ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಕರ್ಣಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೨೧. ಎರಡು ಸ್ಥಿರವಾದ ಕೋಲುಗಳು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಲಂಬಗಳಾಗಿವೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಯ ಚಲಿಸುವ ಕೋಲನ್ನು ಸರಿಸುತ್ತ ಸರಿಸುತ್ತ ಆ ಎರಡು ಸ್ಥಿರ ಕೋಲುಗಳ ಮೇಲೆ ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತುದಿಯು ಮುಟ್ಟುವಂತೆ ಇಟ್ಟಿದೆ. ಆದರೆ ಚಲಿಸುವ ಕೋಲಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೨೨. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಅಬ, ಕಡ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಪ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಮತ್ತು ಅಪ = ಕಪ ಇದ್ದರೆ ಬಪ = ಡಪ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨೩. ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನವು. ಆದರೆ $\angle$ ಬಅಕ + $\angle$ ಬಕಅ = $\angle$ ಅಡಕ; ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨೪. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ ವ್ಯಾಸವಿದೆ. ಅ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅದು ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಪ ಮತ್ತು ಫ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಪಬ = ಫಬ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨೫. $\triangle$ ಅಬಕ ಇದರ $\angle$ ಅ ದ ಅಂತರ್ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಬಕ ಭುಜದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಕೂಡುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

***೨೬.** $\triangle$ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ ಪ ಇದೊಂದು ಲಂಬ ಸಂಪಾತವಿದೆ. ಅಬಕ ವರ್ತುಳ ದಲ್ಲಿ ಕಫ ಇದೊಂದು ವ್ಯಾಸವಿದೆ. ಆದರೆ ಅಪಬಫ ಸಮಾ. ಭು. ಚೌ. ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಮ ಪರಿಮಧ್ಯವೂ, ನ ಇದು ಬಕ ದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವೂ ಇದ್ದರೆ ಮನ = $\frac{1}{2}$ಅಪ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

***೨೭.** ಅಬಕಡ ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಅದರ ಅಕ, ಬಡ ಕರ್ಣ ಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಪ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದು, ಅವು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಅಬ ದಲ್ಲಿ ಮ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿದೆ. ಮಪ ಬೆಳಿಸಿದರೆ ಅದು ಕಡ ದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಅದರಂತೆ ಆ ಚೌಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬವು ಅದರ ಎದುರಿನ ಭುಜವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨೮. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. $\angle$ ಅ ಇದರ ಅಂತರ್‌ದ್ವಿಭಾಜಕ ಅಈ ಇದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತರ ಕೂಡುವದು. ಅದರಂತೆ $\angle$ ಕ ದ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಕಯ ಇದು ಅಈ ಇದನ್ನು ಯ ಹತ್ತರ ಕೂಡು ವದು. ಆದರೆ ಈಬ = ಈಕ = ಈಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.]

೨೯. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಅ ಮತ್ತು ಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ರೇಷೆಗಳು ಕಅಡ ಮತ್ತು ಈಬಫ. ಅವು ಒಂದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಕ ಮತ್ತು ಈ ಗಳಲ್ಲಿ, ಹಾಗೂ ಎರಡನೆಯ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಡ ಮತ್ತು ಫ ಗಳಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವವು. ಆದರೆ ಕಈ ಇದು ಡಫ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.]

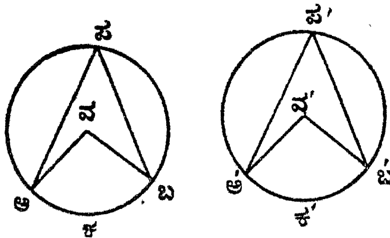
೩೦. △ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ ಅಡ ⊥ ಬಕ. ಬಕ, ಕಅ, ಅಬ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅ′, ಬ′, ಕ′ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಅ′ ಬ′ ಕ′ ವರ್ತುಳವು ಡ ದಲ್ಲಿಯೂ ಹಾದು ಹೋಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಮತ್ತು ಶಿರೋಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆದರ ಎದುರಿನ ಭುಜದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬಗಳ ಪಾದ ಬಿಂದುಗಳು ಇವೆಲ್ಲ ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[ಪ್ರಥಮ ವಾಚನದ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ೫೪ ಮತ್ತು ೫೫ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿ ಗೃಹೀತ ಹಿಡಿಯಬೇಕು.]

* ಪ್ರಮೇಯ ೫೪.

ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರದ ಹತ್ತಿರದ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ, ಅಥವಾ ಪರಿಘದ ಹತ್ತಿರದ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ ಅವೆರಡು ಕಂಸಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಕಬ, ಅ′ಕ′ಬ′** ಇವೆರಡು ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳ ಕಂಸಗಳು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ **ವ, ವ′** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಆಗುವ **ಅವಬ, ಅ′ವ′ಬ′** ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಅವೆ. ಅಥವಾ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಆಗುವ **ಅಪಬ, ಅ′ಪ′ಬ′** ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಅವೆ.

ಸಾಧ್ಯ :— **ಅಬಕ** ಕಂಸ = **ಅ′ಬ′ಕ′** ಕಂಸ.

ಸಿದ್ಧತೆ :— ∠ ಅಪಬ= ∠ ಅ′ಪ′ಬ′ ಇದು ಪಕ್ಷ ಆಗಿದ್ದರೆ,

∠ ಅವಬ=೨ ∠ ಅಪಬ ಮತ್ತು ∠ ಅ′ವ′ಬ′=೨ ∠ ಅ′ಪ′ಬ′

∴ ∠ ಅವಬ= ∠ ಅ′ವ′ಬ′

ಆದಕ್ಕಾಗಿ ∠ ಅವಬ= ∠ ಅ′ವ′ಬ′ ಈ ಪಕ್ಷವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿದರಾಯಿತು.

ಅಪಬಕ ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಅ′ಪ′ಬ′ಕ′** ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ **ವ** ಕೇಂದ್ರವು **ವ′**ದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು **ವಅ** ರೇಖೆಯು **ವ′ಅ′**ದ ಮೇಲೆ, ಬೀಳುವಂತೆ ಎತ್ತಿಡಿರಿ.

∵ ∠ ಅವಬ = ∠ ಅ′ವ′ಬ′

∴ **ವಬ** ರೇಖೆಯು **ವ′ಬ′**ದ ಮೇಲೆ ಬೀಳುವದು. ವರ್ತುಳಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವದರಿಂದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸಮಾನ ಇವೆ.

∴ **ವಅ = ವ′ಅ′; ವಬ = ವ′ಬ′**

∴ **ಅ** ಬಿಂದುವು **ಅ′**ದ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತು **ಬ** ಬಿಂದುವು **ಬ′**ದ ಮೇಲೆ ಬೀಳುವವು.

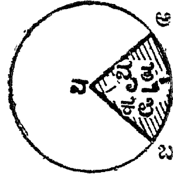
ವರ್ತುಳಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದು ಒಂದರ ಕೇಂದ್ರವು ಇನ್ನೊಂದರ ಕೇಂದ್ರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಪರಿಘಗಳು ಪೂರ್ಣತ್ವದಿಂದ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಹೋಲುವವು.

∴ **ಅಕಬ** ಕಂಸವು **ಅ′ಕ′ಬ′** ಕಂಸಕ್ಕೆ ಪೂರ್ಣತ್ವದಿಂದ ಕೂಡುವದು.

∴ **ಅಕಬ** ಕಂಸ = **ಅ′ಕ′ಬ′** ಕಂಸ.

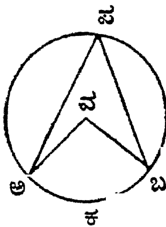
ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ :— ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಕಂಸಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳು (ಅಥವಾ ಪರಿಘಕೋನಗಳು) ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಕಂಸಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.

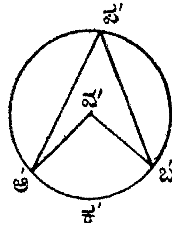
ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :– ವರ್ತುಳದ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಮುಟ್ಟಿದ ಕಂಸದ ನಡುವಿನ ವರ್ತುಳದ ಭಾಗಕ್ಕೆ **ವೃತ್ತಕಲಾ** (Sector) ಅನ್ನುವರು.



ಪ್ರಮೇಯ ೫೫. (ಪ್ರಮೇಯ ೫೪ ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)

ಎರಡು ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳ ಎರಡು ಸಮಾನ ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು; ಪರಿಘಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.





ಪಕ್ಷ :— **ವ** ಮತ್ತು **ವ′** ಕೇಂದ್ರಗಳಿರುವ ಎರಡು ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳ **ಅಕಬ** ಮತ್ತು **ಅ′ಕ′ಬ′** ಕಂಸಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು; ಈ ಕಂಸಗಳ ಪೂರಕ ಕಂಸಗಳ ಮೇಲೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಪ** ಮತ್ತು **ಪ′** ಬಿಂದುಗಳಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ :— $\angle$ **ಅವಬ** = $\angle$ **ಅ′ವ′ಬ′** ಮತ್ತು $\angle$ **ಅಪಬ** = $\angle$ **ಅ′ಪ′ಬ′**

ಸಿದ್ಧತೆ :— **ಅಪಬಕ** ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಅ′ಪ′ಬ′ಕ′** ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಎತ್ತಿಡಿರಿ. ಆಗ **ವ** ಕೇಂದ್ರವು **ವ′** ಕೇಂದ್ರದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು **ವಅ** ರೇಖೆಯು **ವ′ಅ′** ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಬೀಳುವದು.

ವರ್ತುಳಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವದರಿಂದ **ವಅ= ವ′ಅ′**; ಮತ್ತು **ಅ** ಬಿಂದುವು **ಅ′** ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಬೀಳುವದು; ಹಾಗು ಎರಡೂ ವರ್ತುಳ ಗಳ ಪರಿಘಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಪೂರ್ಣತ್ವದಿಂದ ಕೂಡುವವು.

ಅಕಬ ಕಂಸ= **ಅ′ಕ′ಬ′** ಕಂಸ, ಮತ್ತು **ಅ** ಬಿಂದು **ಅ′**ದ ಮೇಲೆ ಬೀಳುವದು.

∴ **ಬ** ಬಿಂದು **ಬ′**ದ ಮೇಲೆ ಬೀಳುವದು.

ಮತ್ತು **ವ** ಬಿಂದು **ವ′**ದ ಮೇಲಿರುವದರಿಂದ **ವಬ** ರೇಷೆ **ವ′ಬ′**ದ ಮೇಲೆ ಬೀಳುವದು.

∴ ∠ **ಅವಬ** = ∠ **ಅ′ವ′ಬ′**

ಇನ್ನು ∠ **ಅಪಬ**=½ ∠ **ಅವಬ**; ಮತ್ತು ∠ **ಅ′ಪ′ಬ′**=½ ∠ **ಅ′ವ′ಬ′**;

∴ ∠ **ಅಪಬ** = ∠ **ಅ′ಪ′ಬ′**

ಟಿಪ್ಪಣಿ:— ಈ ಪ್ರಮೇಯವು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಸಮಾನ ಕಂಸಗಳ ಮೇಲಿನ ಕೋನಗಳಿಗೂ ಕೂಡಿ ಬರುವದು.

ಉಪ ಸಿದ್ಧಾಂತ:—ಎರಡು ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳ ಅಕಬ, ಅ′ಕ′ಬ′ ಕಂಸ ಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಅವಬ, ಅ′ವ′ಬ′ ವೃತ್ತಕಲೆಗಳು ಏಕರೂಪ ಆಗಿರುವವು.

ಪ್ರಮೇಯ ೫೬.

ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳ (ಇಲ್ಲವೆ ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ) ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನವಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ವರ್ತುಳಗಳ ಕಂಸಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮಾನ ಇರುವವು. ಅಂದರೆ, ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಮಹಾನ ಕಂಸವು ಇನ್ನೊಂದರ ಮಹಾನ ಕಂಸಕ್ಕೂ, ಮತ್ತು ಅದರ ಲಘುಕಂಸವು ಇನ್ನೊಂದರ ಲಘು ಕಂಸಕ್ಕೂ ಸರಿಯಿರುವದು.

ಪಕ್ಷ:— ವ ಮತ್ತು ವ' ಕೇಂದ್ರಗಳಿರುವ **ಅಪಬಕ** ಮತ್ತು **ಅ'ಪ'ಬ'ಕ'** ಎರಡು ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿ **ಅಬ** ಮತ್ತು **ಅ'ಬ'** ಸಮಾನ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— ಮಹಾನ ಕಂಸ **ಅಪಬ** = ಮಹಾನ ಕಂಸ **ಅ'ಪ'ಬ'** ಮತ್ತು ಲಘುಕಂಸ **ಅಕಬ** = ಲಘುಕಂಸ **ಅ'ಕ'ಬ'**.

ರಚನೆ:— ಅವ, ಬವ, ಅ'ವ', ಬ'ವ' ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಅವಬ** ಮತ್ತು **ಅ'ವ'ಬ'** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ.

ಅಬ = ಅ'ಬ' (ಪಕ್ಷ)
ವಅ = ವ'ಅ' (ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)
ವಬ = ವ'ಬ' („ „ „)

∴ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಆಗಿರುವವು.

∴ ∠ಅವಬ = ∠ಅ'ವ'ಬ'

∴ ಕಂಸ **ಅಕಬ** = ಕಂಸ **ಅ'ಕ'ಬ'**

ಪರಂತು ವರ್ತುಳಗಳ ಪರಿಘಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.

∴ ಉಳಿದ ಕಂಸ **ಅಪಬ** = ಉಳಿದ ಕಂಸ **ಅ'ಪ'ಬ'**.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ:—ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳ (ಇಲ್ಲವೆ ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ) ಸಮಾನ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಕೇಂದ್ರ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು, ಮತ್ತು ಪರಿಘ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಅಥವಾ ಪೂರಕ ಇರುವವು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ ೧:—ವ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಅಕ, ಕಬ ಕಂಸಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ $\angle$ ಅವಬ $=$ ೨ $\angle$ ಅವಕ ಆಗುವದು. ಪರಂತು ಅಬ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯು, ಅಕ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಇಮ್ಮಡಿ ಆಗಲಾರದು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ ೨:— $\angle$ ಅವಬ $=$ ಕ್ಷ° ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ೩೬೦ ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದ ಮೇಲಿನ ಕೇಂದ್ರ ಕೋನವು ೧° ಆಗುವದು; ಮತ್ತು ಅಬ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಇಂಥ ಕ್ಷ ಭಾಗಗಳು ಬರುವವು.

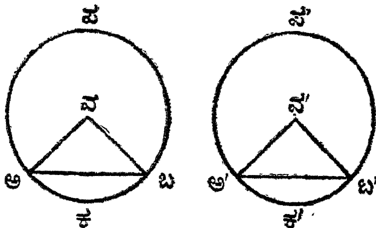
$$\therefore \text{ ಕಂಸ ಅಬ ದ ಉದ್ದಳತೆ} = \frac{\text{ಕ್ಷ}}{\text{೩೬೦}} \text{ ಪರಿಘದ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದಳತೆ.}$$

$$\therefore \frac{\text{ಅಬ ಕಂಸ}}{\text{ಎಲ್ಲ ಪರಿಘ}} = \frac{\angle \text{ಅವಬ}}{\text{ವ ದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಕೋನ}} = \frac{\angle \text{ಅವಬ}}{\text{೪ ಕಾಟಕೋನ}}$$

$$\text{ಅದರಂತೆ } \frac{\text{ಅವಬ ವೃತ್ತಕಲೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}}{\text{ಪೂರ್ಣ ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}} = \frac{\angle \text{ಅವಬ}}{\text{೪ ಕಾಟಕೋನ}}.$$

ಪ್ರಮೇಯ ೫೭. (ಪ್ರ. ೫೬ ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)

ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳ (ಇಲ್ಲವೇ ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ) ಎರಡು ಕಂಸಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಕಂಸಗಳ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.



ಪಕ್ಷ :— ವ ಮತ್ತು ವ' ಕೇಂದ್ರಗಳಿರುವ ಎರಡು ಸಮಾನ ವರ್ತುಳ ಗಳಲ್ಲಿ ಅಕಬ ಮತ್ತು ಅ'ಕ'ಬ' ಎರಡು ಸಮಾನ ಕಂಸಗಳಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ :— ಅಬ ಜ್ಯಾರೇಖೆ = ಅ'ಬ' ಜ್ಯಾರೇಖೆ.

ರಚನೆ:— ಅಬ, ಬವ, ಅ'ವ', ಬ'ವ' ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ಅಕಬ, ಅ'ಕ'ಬ' ಇವು ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಮಾನ ಕಂಸಗಳಿರುವವು.

∴ ಅವುಗಳ ಮೇಲನ ಕೇಂದ್ರಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.

∴ ∠ ಅವಬ = ∠ ಅ'ವ'ಬ'

ಇನ್ನು ಅವಬ, ಅ'ವ'ಬ' ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

ವಅ = ವ'ಅ' (ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)
ವಬ = ವ'ಬ' (,, ,, ,,)
∠ ಅವಬ = ∠ ಅ'ವ'ಬ' (ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದೆ)

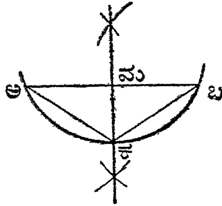
∴ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುವವು. (೨ ಭುಜ, ಅಂತ. ಕೋನ)

ಅಬ = ಅ'ಬ'

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ :— ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳ (ಇಲ್ಲವೆ ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ) ಎರಡು ಜ್ಯಾರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಕೇಂದ್ರಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ, ಇಲ್ಲವೆ ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪರಿಘಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಅಥವಾ ಪೂರಕ ಇದ್ದರೆ ಆ ಜ್ಯಾರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.

ಕೃತ್ಯ ೧೫.

ವರ್ತುಳದ ಕೊಟ್ಟ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದು.



ಪಕ್ಷ :— **ಅಬ** ಇದೊಂದು ವರ್ತುಳ ಕಂಸಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ :— **ಅಕ** ಕಂಸ = **ಕಬ** ಕಂಸ ಆಗುವಂತೆ, **ಅಬ** ಕಂಸದಲ್ಲಿ **ಕ** ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು.

ರಚನೆ:— **ಅಬ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. **ಅಬ** ದ ಮೇಲೆ ಅದರ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ **ಮಕ** ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ಅಬ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಮ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು **ಅಬ** ಕಂಸವನ್ನು **ಕ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಅಂದರೆ **ಕ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಬಿಂದು ಆಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಅಕ, ಬಕ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಅಬ ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವು **ಅ** ಮತ್ತು **ಬ** ದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದು; ಮತ್ತು ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ **ಕ** ಬಿಂದು ಇರುವದು.

∴ **ಅಕ** = **ಅಬ.**

ಸಮಾನ ಜ್ಯಾರೇಖೆಗಳ ಕಂಸಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.

∴ ಕಂಸ **ಅಕ** = ಕಂಸ **ಕಬ.**

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೨೮.

೧. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಅ, ಬ, ಕ, ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅಬ ಮತ್ತು ಅಕ ಲಘು ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿ ಮ ಮತ್ತು ನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ∠ಅಬಕ = ೪೦° ಮತ್ತು ∠ಅಕಬ = ೬೦° ಇದ್ದರೆ, ∠ಬಕಮ ಮತ್ತು ∠ಕಮನ ಈ ಕೋನ ಮಾನಗಳನ್ನು (ಅಂಶಾತ್ಮಕ) ಹೇಳಿರಿ.

೨. ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದ ಚೌರಸ ಮತ್ತು ಸುಸಮ ಷಟ್‌ಕೋನ ಇವುಗಳ ಅಬ ಮತ್ತು ಅಕ ಭುಜಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ∠ ಬಅಕ ಇದು ಎಷ್ಟು ಇರುವದು?

೩. ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬಕಡ ಚೌರಸವನ್ನೂ, ಅಪಫ ಸಮ ಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಬಕ ಲಘು ಕಂಸದ ಮೇಲೆ ಪ ಬಿಂದು ಇದೆ. ಆದರೆ ∠ಬಅಪ ಮತ್ತು ∠ಪಡಕ ಇವು ಎಷ್ಟು ಇರುವವು?

೪. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ, ಕಡ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಆದರೆ ಕಂಸ ಅಕ = ಕಂಸ ಬಡ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೫. ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನದ ಎದುರುಬದುರಿನ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಇನ್ನುಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾಂತರ ಇರುವವು.

೬. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿದ್ದ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಅಬ, ಕಡ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿದರೆ ಅವು ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ ಪ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವವು. ಆದರೆ,

∠ಅಪಕ = ೧/೨ (∠ಅಮಕ − ∠ಬಮಡ) ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೭. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿದ್ದ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಅಬ, ಕಡ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ವರ್ತುಳದ ಒಳಬದಿಯಲ್ಲಿ ಪ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು. ಆದರೆ ∠ಅಪಕ = ೧/೨ (∠ಅಮಕ + ∠ಬಮಡ) ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೮. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ ಇದು ನಿಯಮಿತ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯಿದೆ. ಅಬದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಲಘು ಕಂಸದ ಮೇಲೆ, ಅಥವಾ ಮಹಾನಕಂಸದ ಮೇಲೆ ಕ ಇದೊಂದು ಚಲಬಿಂದುವಿದೆ. ಆದರೆ, ∠ಅಕಬ ಇದರ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ವರ್ತುಳದ ಒಂದೇ ನಿಯತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೯. △ಅಬಕ ದ ∠ಅ ದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಈ ದಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವದು. ಈಮ ⊥ ಅಬ, ಮತ್ತು ಈನ ⊥ ಅಕ ಇದ್ದರೆ, ಮಬ = ನಕ = ೧/೨(ಅಬ ∾ ಅಕ) ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೦. △ಅಬಕ ದ ಬ ಮತ್ತು ಕ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಎದುರಿನ ತಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬಗಳು ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಮ ಮತ್ತು ನ ಗಳಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವವು. ಆದರೆ ಕಂಸ ಮಅ = ಕಂಸ ನಅ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

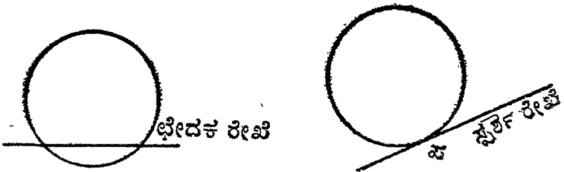
೨೬ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘವನ್ನು ಅದರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಆಮರ್ಯಾದ ರೇಖೆಗೆ ವರ್ತುಳಹ **ಛೇದಕರೇಖೆ** (Secant) ಅಥವಾ **ಛೇದಿಕೆ** ಎನ್ನುವರು.

ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘವನ್ನು ಅದರ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟುವ ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಬೆಳೆಯಿಸಿದರೂ, ಪುನಃ ಪರಿಘವನ್ನು ಮುಟ್ಟದಿರುವ ರೇಖೆಗೆ ಆ ವರ್ತುಳದ **ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ** (Tangent) ಅಥವಾ **ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ** ಅನ್ನುವರು.



ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟುವದೋ ಆ ಬಿಂದುವಿಗೆ **ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು** (Point of contact) ಅನ್ನುವರು. ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳವನ್ನು **'ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು'** ಹೀಗೆ ಹೇಳುವರು. ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಪ ಇದು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಮುಟ್ಟುವದು** (Meet) ಮತ್ತು **ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು** (Touch) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುಕಡಿಮೆಯನ್ನು ಚನ್ನಾಗಿ ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡಿರಿ. ಛೇದಕ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಇವೆರಡೂ ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಮುಟ್ಟುವವು.** ಆದರೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಇದೊಂದೇ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.

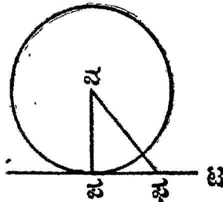
ಉದಾ. ೧ :—ಸರಳ ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟುವದು ಶಕ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಉದಾ. ೨ :—ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಅ ಬಿಂದುವಿದೆ. ಮತ್ತು ವರ್ತುಳದ ಒಳಬದಿಯಲ್ಲಿ ಮ ಬಿಂದುವಿದೆ. ಆದರೆ ಬೆಳಿಸಿದ ಅಮ ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳ ಪರಿಘವನ್ನು ಅ ಅಲ್ಲದೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುವ ಬ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಮುಟ್ಟುವದು.

ಉದಾ. ೩ :—ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನ ಹೊರತಾಗಿ, ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೇ ಬಿಂದುವು ವರ್ತುಳದ ಹೊರ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವದು.

ಪ್ರಮೇಯ ೫೮.

ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೊರಡುವ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಮೇಲೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.



ಪಕ್ಷ :— ವ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ **ಪ** ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. **ಟ'ಪಟ** ರೇಖೆಯು **ವಪ** ತ್ರಿಜ್ಯದ ಮೇಲೆ **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ :— **ಪಟ** ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ :— **ಟಪಟ'** ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ (ಪ ಬಿಟ್ಟು ಬೇರೆ) ಯಾವದೊಂದು **ಫ** ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮತ್ತು **ವಫ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

$\angle$ ವಪಕ ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

∴ $\angle$ ವಫಪ ಕಾಟಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದೆ.

∴ $\angle$ ವಪಫ > $\angle$ ವಫಪ

∴ ವಫ > ವಪ

ವಫ ರೇಷೆಯು ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗುವದು; ಆದ್ದರಿಂದ **ಫ** ಬಿಂದುವು ವರ್ತುಳದ ಹೊರಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬೀಳುವದು.

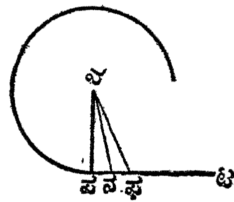
ಪರಂತು, **ಫ** ಇದು **ಟ**'ಪಟಿದಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೊಂದು ಬಿಂದುವಿದೆ. (**ಪ** ದ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತ).

∴ **ಟ'ಪಟ** ಇದನ್ನು ಎಷ್ಟೇ ಬೆಳಿಸಿದರೂ, ಅದು ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಪ** ಇದೊಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟುವದು.

∴ **ಟ'ಪಟ** ರೇಷೆಯು ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.

ಪ್ರಮೇಯ ೫೯.

ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಯು, ಅದರ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೊರಡುವ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ವ ಕೇಂದ್ರವಿದ್ದ ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಪಟ** ರೇಷೆಯು **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.

ಸಾಧ್ಯ:— ∠ **ವಪಟ** ಇದು ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ∠ **ವಪಟ** ಇದು ಕಾಟಕೋನವಿರದಿದ್ದರೆ, **ಪಟ** ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ **ವನ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಂದರೆ **ನ** ಬಿಂದುವು **ಪ** ದಿಂದ ಬೇರೊಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿರಬಹುದು. ಬೆಳಿಸಿದ **ಪನ** ದಲ್ಲಿ **ನಫ** = **ಪನ** ಆಗುವಂತೆ **ಫ** ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ವಪನ, **ವಫನ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

ಪನ = **ನಫ** (ರಚನೆ)
ವನ = **ವನ** (ಸಾಧಾರಣ)
∠ **ವನಪ** = **ವನಫ** (ಕಾಟಕೋನ)

∴ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇವೆ.

∴ **ವಪ** = **ವಫ**

∴ ವ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ **ವಪ** ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ತೆಗೆದ ವರ್ತುಳವು **ಫ** ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.

ಅಂದರೆ, **ಪಟ** ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳ ಪರಿಘವನ್ನು **ಪ** ಮತ್ತು **ಫ** ಎರಡೂ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟುವದು.

ಪರಂತು ಇದು ಶಕ್ಯವಿಲ್ಲ (ಯಾಕಂದರೆ, ಇಂಥ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗುವದು).

∴ ∠ **ವಪಟ** ಇದು ಕಾಟಕೋನ ಇರಲಿಕ್ಕೇ ಬೇಕು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೧ :—ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೆಗೆದ ಲಂಬವು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೨ :—ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಒಂದು ಮತ್ತು ಕೇವಲ ಅದೊಂದೇ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ ೫೪ ರ ಇನ್ನೊಂದು ಸಿದ್ಧತೆ:

ಪಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಲ್ಲಿ **ಪ** ದ ಹೊರತು ಯಾವದೊಂದು **ಫ** ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ವಫ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಪಟ ಇದು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯಿರುವದರಿಂದ **ಪ** ದ ಹೊರತು ಉಳಿದ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ವರ್ತುಳದ ಹೊರ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವವು. *

∴ **ವಫ > ವಪ.**

∴ **ವಪ** ಇದು **ವ** ದಿಂದ **ಪಟ** ದ ಲಘುತ್ತಮ ಅಂತರವಿದೆ.

∴ **ವಪ ⊥ ಪಟ.**

ಟಿಪ್ಪಣಿ:—ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ * ಈ ಗುರುತಿನಿಂದ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧಾನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಹೇಗೆ ತೋರಿಸಬೇಕು? ಎಂಬುವದು ಸಹಜವಾಗಿ ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಬರುವದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಿದ್ಧತೆಯು ಅಷ್ಟು ಸಮಾಧಾನಕರವಲ್ಲ. ಪರಂತು ಇದೇ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ತಕ್ಕೊಳ್ಳುವದಿದ್ದರೆ, ಶಿಕ್ಷಕರು ಮೊದಲು ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ, ನಂತರ ಇದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

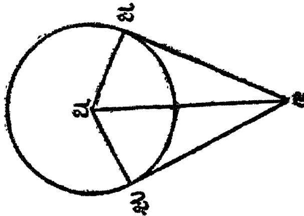
ಪ್ರಮೇಯ ೬೦.

ವರ್ತುಳದ ಹೊರಬದಿಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ,

(೧) ಆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು;

(೨) ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ (ಎದುರಿನ) ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿರುವಷ್ಟಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು;

(೩) ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವನ್ನೂ, ಕೇಂದ್ರವನ್ನೂ ಕೂಡಿಸುವ ರೇಖೆಯಿಂದ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— ವ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ ಅ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆದರ ಅಪ, ಅಫ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿವೆ; ಮತ್ತು ಪ, ಫ ಇವು ಅವುಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳು.

ಸಾಧ್ಯ:— (೧) ಅಪ = ಅಫ
(೨) ∠ ಅವಪ = ∠ ಅವಫ
(೩) ∠ ಪಅವ = ∠ ಫಅವ

ಸಿದ್ಧತೆ:— ಅವಪ, ಅವಫ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ

ಅಪವ, ಅಫವ ಇವು ಕಾಟಕೋನಗಳು.
ವಅ ಕರ್ಣ = ವಅ ಕರ್ಣ (ಸಾಧಾರಣ).
ವಪ ಭುಜ = ವಫ ಭುಜ (ತ್ರಿಜ್ಯ).

∴ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುವವು.

∴ (೧) ಅಪ = ಅಫ
(೨) ∠ ಅವಪ = ∠ ಅವಫ
(೩) ∠ ಪಅವ = ∠ ಫಅವ.

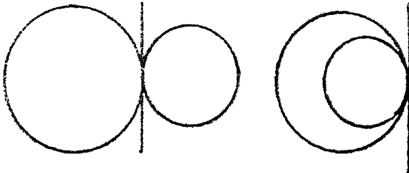
ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ:— ಅವ ⊥ ಪಫ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:— ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರದಷ್ಟು ಹಿಡಿದಿರುವದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಮುಟ್ಟಿದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಎರಡೂ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ವರ್ತುಳಗಳು **ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು** ಅನ್ನುವರು.

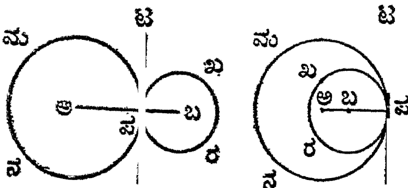
ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ವರ್ತುಳಗಳು ಉಭಯ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಿಗೆ **ಬಹಿಃಸ್ಪರ್ಶ** ವರ್ತುಳಗಳೆನ್ನುವರು; ಮತ್ತು ಅವು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ **ಅಂತಃಸ್ಪರ್ಶ** ವರ್ತುಳಗಳೆನ್ನುವರು.



ಬಹಿಃಸ್ಪರ್ಶ (External Contact) **ಅಂತಃಸ್ಪರ್ಶ** (Internal Contact)

ಪ್ರಮೇಯ ೬೧.

ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡಿದರೆ, ಅವುಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವು, ಆ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ಇಲ್ಲವೆ ಆ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಬೆಳೆಸಿದ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುವದು.



ಪಕ್ಷ :— ಅ ಮತ್ತು ಬ ಕೇಂದ್ರಗಳಿರುವ **ಪಮನ, ಪಖರ** ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು.

ಸಾಧ್ಯ:— **ಪ** ಬಿಂದುವು **ಅಬ** ದಲ್ಲಿ, ಅಥವಾ ಬೆಳಿಸಿದ **ಅಬ** ದಲ್ಲಿ ಇರುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುತ್ತಿರುವದರಿಂದ, ಅವುಗಳನ್ನು **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ರೇಖೆಯು ಒಂದೇ ಇರುವದು. ಅದು **ಪಟ** ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. **ಪಮನ** ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೋಗುವ ತ್ರಿಜ್ಯವು **ಅಪ** ಇದೆ.

∴ **ಅಪ ⊥ ಪಟ.**

ಪಖರ ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೋಗುವ ತ್ರಿಜ್ಯವು **ಬಪ** ಇದೆ.

∴ **ಬಪ ⊥ ಪಟ.**

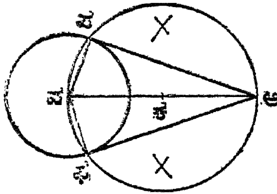
ಅಂದರೆ, **ಅಪ, ಬಪ** ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ **ಪಟ** ಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಪರಂತು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಒಂದೇ ಲಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು.

∴ **ಅಪ, ಬಪ** ಇವು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿವೆ. ಅಂದರೆ, **ಪ** ಬಿಂದುವು **ಅಬ** ದ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ ಬೆಳಿಸಿದ **ಅಬ** ದ ಮೇಲೆ ಇರುವದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ:—ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡಿದರೆ, ಆವೆರಡರ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು, ಅವು ಬಹಿಃಸ್ಪರ್ಶವಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು, ಮತ್ತು ಅಂತಃಸ್ಪರ್ಶವಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯಷ್ಟು ಇರುವದು.

ಕೃತ್ಯ ೧೩.

ವರ್ತುಳದ ಹೊರಬದಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟದ್ದೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಅದಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.



ಪಕ್ಷ :— ವ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳವನ್ನೂ, ಅದರ ಹೊರಗೆ ಅ ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ :— ಅ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ :— **ವಅ** ಕೂಡಿಸಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದನ್ನು **ಕ** ದಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ.

ಕ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ **ಕಅ** ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ವರ್ತುಳವು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಪ** ಮತ್ತು **ಫ** ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಅಪ, ಅಫ** ಕೂಡಿರಿಸಿ. ಅಂದರೆ ಅವು ಇಷ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗುವವು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ವಪ, ವಫ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

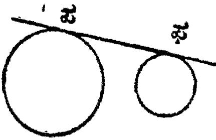
ಕ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ **ಕಅ** ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ತೆಗೆದ ವರ್ತುಳವು **ವ** ಧಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು ($\because$ **ಕವ** = **ಕಅ**); ಅಂದರೆ **ಅವ** ಇದು ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸವಾಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ **ವಪಅ** ಇದೊಂದು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳವಾಗುವದು. ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು ಕಾಟಕೋನವಿರುವದು.

$\therefore$ $\angle$ **ವಪಅ** ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

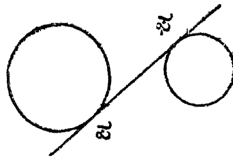
ಪರಂತು, ವಪ ಇದು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪಅ ರೇಖೆಯು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಪ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.

ಆದರಂತೆ ಫಅ ರೇಖೆಯು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಫ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ



ಸರಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ



ತಿರ್ಯಕ್ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ

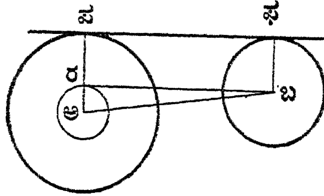
ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಪ ದಲ್ಲಿಯೂ ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಫ ದಲ್ಲಿಯೂ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡಿದರೆ, ಆ ರೇಖೆಗೆ ಆ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ **ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ** (Common tangent) ಅನ್ನುವರು.

ಎರಡೂ ವರ್ತುಳಗಳು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ ಇದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ **ಸರಳ** (direct) ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ ಅಥವಾ **ಬಹಿರ್ಗತ** ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ (external or exterior common tangent) ಅನ್ನುವರು.

ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶವಾಗಿರುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಅದರ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗೆ **ತಿರ್ಯಕ್** ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ, ಅಥವಾ **ಅಂತರ್ಗತ** ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ (transverse or internal or interior common tangent) ಅನ್ನುವರು.

ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ಸರಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಪೃಥಃಕರಣ ಮಾಡೋಣ:—

ಅ, **ಬ** ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು **ಅ′**, **ಬ′** ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ **ಪಫ** ಇದೊಂದು ಸರಳ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಯಿದೆ. (ಅ′ > ಬ′) ಅಂದರೆ, **ಅಪ**, **ಬಪ** ಇವು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೊರಟ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವದರಿಂದ **ಪಫ**ದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವವು; ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವವು.



ಇನ್ನು, **ಪಫ**ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ **ಬರ** ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅದು **ಅಪ** ರೇಷೆಯನ್ನು **ರ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಮತ್ತು **ಪಫಬರ** ಇದೊಂದು ಆಯತವಾಗುವದು.

ಪರ = **ಫಬ** = ಬ′.

∴ **ಅರ** = **ಅಪ** – **ರಪ** = ಅ′ – ಬ′.

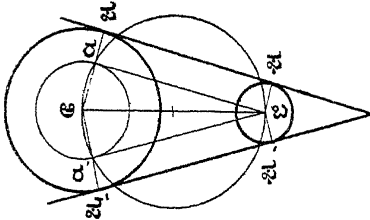
ಮತ್ತು ∠ **ಅರಬ** ಇದು ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

∴ **ಅ** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ **ಅ′ – ಬ′** ಇಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ **ಬರ** ಇದು **ರ**ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲು **ಬರ** ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು. ನಂತರ **ಅರ** ಕೂಡಿಸಿ, ಅದನ್ನು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ **ಪ**ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಬೆಳಿಸಬೇಕು. **ಬಫ** ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು **ಅಪ**ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಅಂದರೆ **ಪ**, **ಫ** ಇವು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳು ತಿಳಿಯುವವು; ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಅದೊಂದು ಸರಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶರೇಷೆ ಆಗುವದು.

ಪೃಥಃಕರಣದಿಂದ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಯು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಬರುವಂತೆ, ಕೃತ್ಯಗಳ ರಚನೆಯೂ ಹೊಳೆಯುವದು. ಈ ಪೃಥಃಕರಣದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ರಚನೆಯು ಸೂಚಿತವಾಗುವದು.

ಕೃತ್ಯ ೧೭.

ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ಸರಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.



ಪಕ್ಷ :— ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ವರ್ತುಳದ **ಅ** ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು **ಅ'** ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನೂ, ಸಣ್ಣ ವರ್ತುಳದ **ಬ** ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು **ಬ'** ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿರುವದುಂಟು.

ಸಾಧ್ಯ:— ಈ ವರ್ತುಳಗಳ ಸರಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ :— **ಅ** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ, **ಅ' – ಬ'** ಇಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಬ** ದಿಂದ **ಬರ, ಬರ'** ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. (ಕೃತ್ಯ ೧೬ ರಂತೆ).†

† ಈ ರಚನೆಯು ಶಕ್ಯವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಬ ಬಿಂದು (ಅ' – ಬ') ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ತುಳದ ಹೊರಬದಿಯಲ್ಲಿರಬೇಕಾಗುವದು. ಅಂದರೆ ಅಬ > ಅ' – ಬ', ಅಂದರೆ ಅಬ + ಬ' > ಅ', ಅಂದರೆ ಬ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳವು ಪೂರ್ಣತ್ವದಿಂದ ದೊಡ್ಡ ವರ್ತುಳದ ಒಳಬದಿಯಲ್ಲಿರಕೂಡದು. ಹಾಗಿದ್ದರೆ, ಸರಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲಿಕ್ಕೆ ಬರಲಾರದು. (ಮುಂದೆ ಪುಟ ೧೫೬ ರಲ್ಲಿಯ ಆಕೃತಿ ನೋಡಿರಿ).

ಅರ, ಅರ' ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಮತ್ತು ಬೆಳಿಸಿರಿ. ಅವು **ಅ'** ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಪ** ಮತ್ತು **ಪ'** ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. **ಬ** ದಿಂದ **ಬಫ, ಬಫ'** ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಅಪ, ಅಪ'** ಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ವಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಪಫ, ಪ'ಫ'** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ, **ಪಫ, ಪ'ಫ'** ಇವು ಸರಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಗಳಾಗು ವವು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ರಪ** = **ಅಪ** − **ಅರ** = **ಅ'** − (**ಅ'** − **ಬ'**) = **ಬ'** = **ಬಫ** ಮತ್ತು **ರಪ** ‖ **ಬಫ** (ರಚನೆ)

∴ **ರಪಫಬ** ಇದೊಂದು ಸಮಾ. ಭು. ಚೌ. ಇದೆ.

ಪರಂತು, **ಬರ** ಇದು ಒಳಬದಿಯ ವರ್ತುಳವನ್ನು **ರ** ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.

∴ ∠ **ಅರಬ** ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

∴ ∠ **ಬರಪ** „

∴ **ಬರಪಫ** ಇದೊಂದು ಆಯತವಿದೆ.

∴ ∠ **ಪ** ಮತ್ತು ∠ **ಫ** ಕಾಟಕೋನಗಳಿರುವವು.

∴ **ಅಪ, ಬಫ** ಇವೆರಡೂ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು **ಪಫ** ದ ಮೇಲೆ ಕಾಟಕೋನ ಗಳನ್ನು ಮಾಡುವವು.

∴ **ಪಫ** ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಯಿದೆ.

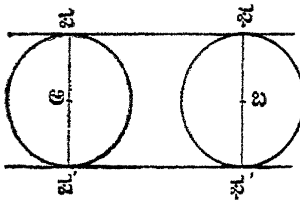
ಎರಡೂ ವರ್ತುಳಗಳು **ಪಫ** ದ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗಿರುವವು.

∴ **ಪಫ** ಇದು ಸರಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಯಿದೆ.

ಅದರಂತೆ **ಪ'ಫ'** ಇದು ಸರಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಯಿದೆ.

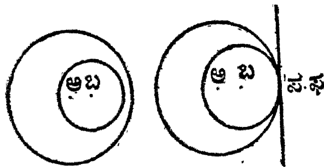
ಎರಡೂ ವರ್ತುಳಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ ಮೇಲಿನ ರಚನೆಯು ನಿರುಪ ಯೋಗವಾಗುವದು. ಇಂಥ ಸಮಯದಲ್ಲಿ **ಅಪ, ಬಫ** ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು **ಅಬ** ದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗುವಂತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅಂದರೆ, **ಪಫ** ಇದು ಇಷ್ಟ

ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ ಆಗುವದು. ಆದರಂತೆ ಪ′ಫ′ ಇದನ್ನೂ ತೆಗೆಯಬಹುದು. (ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ).



ಅ′ = ಬ′

ಸಮಾಂತರ ಸರಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳು.



ಅಬ < ಅ′ − ಬ′   ಅಬ = ಅ′ − ಬ′

ಸ. ಸಾ. ಸ್ಪ. ರೇಖೆ ಇಲ್ಲ.   ಒಂದೇ ಸ. ಸಾ. ಸ್ಪ. ರೇಖೆಯು.

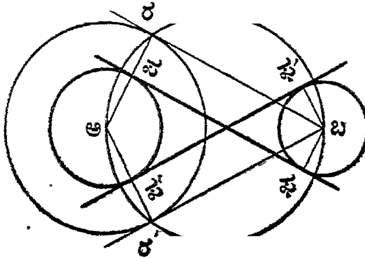
ಅ = ಅ′ − ಬ′ ಇದ್ದರೆ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಅಂತಃ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು. ಈ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ರೇಖೆಯು ಒಂದೇ ಸರಳ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ ಇರುವದು.

ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ತಿರ್ಯಕ್ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಪೃಥಃಕರಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಲೇಖನ ಪದ್ಧತಿ :—ಅ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಅ′ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು “**ವರ್ತುಳ (ಅ, ಅ′)**” ಎಂದು ಬರೆದು ತೋರಿಸುವದು ಸುಲಭವಾಗುವದು. ಇದೇ ಲೇಖನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಕೃತ್ಯ ೧೮.

ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸದಂಥ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ತಿರ್ಯಕ್ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.



ಪಕ್ಷ :— ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು (ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸದಂಥ), ಅವುಗಳ **ಅ, ಬ** ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು, ಮತ್ತು **ಅ', ಬ'** ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವದುಂಟು.

ಸಾಧ್ಯ :— ಈ ವರ್ತುಳಗಳ ತಿರ್ಯಕ್ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ:— **ಅ** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ **ಅ' + ಬ'** ಇಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಬ** ದಿಂದ ಈ ವರ್ತುಳದ **ಬರ, ಬರ'** ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. * **ಅರ, ಅರ'** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅವು ವರ್ತುಳ **(ಅ, ಅ')** ಕ್ಕೆ **ಪ, ಪ'** ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. **ಬಫ, ಬಫ'** ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಅಪ, ಅಪ'** ಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಪಫ, ಪ'ಫ'** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

---

* ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ತುಳವು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದರ ಒಳಬದಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೆಂದು ಗೃಹೀತ ಮಾಡಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಅಬ < ಅ' + ಬ'; ಮತ್ತು ಬ ಬಿಂದು (ಅ, ಅ' + ಬ') ಈ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ ಬೀಳುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಬರ, ಬ'ರ' ಹೀಗೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳು ಹೊರಡುವವು. ಅಬ = ಅ'ಬ' ಇದ್ದರೆ ಒಂದೇ ತಿ. ಸಾ. ಸ್ಪ. ರೇಖೆಯು ಹೊರಡುವದು; ಅದು ವರ್ತುಳದ ಸಾಧಾರಣ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ ಇರುವದು.

ಪಫ, ಪ′ಫ′ ಇವು ಇಷ್ಟ ತಿರ್ಯಕ್ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳಾಗು ವವು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಪರ** = **ಅರ** − **ಅಪ** = (ಅ′ + ಬ′) − ಅ′ = ಬ′ = **ಫಬ**
ಮತ್ತು **ಪರ** ‖ **ಫಬ** (ರಚನೆ).

∴ **ಪರಬಫ** ಇದೊಂದು ಸಮಾ. ಭು. ಚೌ. ಆಗುವದು.

ಪರಂತು **ಬರ** ಇದು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯಿದೆ.

∴ ∠ **ರ** ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

∴ **ಪರಬಫ** ಆಯತವಿದೆ.

∴ ∠ **ಪ**, ∠ **ಫ** ಇವೆರಡು ಕಾಟಕೋನಗಳು.

ಅಪ, ಬಫ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು **ಪಫ**ದ ಮೇಲೆ **ಪ** ಮತ್ತು **ಫ** ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿವೆ.

∴ **ಪಫ** ಇದು ಎರಡೂ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.

ಮತ್ತು ಆ ವರ್ತುಳಗಳು ರೇಖೆಯ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿವೆ.

∴ **ಪಫ** ಇದು ತಿರ್ಯಕ್ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯಿದೆ; ಅದರಂತೆ
ಪ′ಫ′ ,, ,, ,, ,, ,,

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೨೯.

೧. ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸದ ಎರಡೂ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ತೆಗೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವವು.

೨. ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳಿರುವವು.

೩. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಮ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡು ವವು. ಮ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೆಗೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮತ್ತು ಪ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡೂ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಪತ, ಪತ′ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮ ಯಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಕೆಲವು ಸಮಕೇಂದ್ರ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆ ಎಲ್ಲ ವರ್ತುಳಗಳ ಹೊರಗೆ ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಪ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಲ್ಲ ವರ್ತುಳಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಆ ಎಲ್ಲ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳು ಬೇರೊಂದು ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಅಬಕಡ ಚೌಕೋನದ ಒಳಬದಿಯಲ್ಲಿ, ಅದರ ನಾಲ್ಕೂ ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ವರ್ತುಳವಿದೆ. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ. ಆದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

(೧) ಅಬ + ಕಡ = ಬಕ + ಅಡ ;

(೨) ∠ ಅಮಬ + ∠ ಕಮಡ = ∠ ಬಮಕ + ∠ ಅಮಡ
= ೨ ಕಾಟಕೋನ.

೬. ಸಮಾ. ಭು. ಚೌ. ದ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳು ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಅದು ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನವಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೭. ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ಸರಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳು (Direct Common tangents) ಆ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಪ, ಫ, ರ, ಸ, ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು. (ಪ, ರ ಇವು ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತು ಫ, ಸ ಇವು ಇನ್ನೊಂದರ ಮೇಲೆ ಇರುವವು.) ಆದರೆ ಪರ|| ಫಸ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೮. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಅಪ, ಅಫ ಎಂಬ ಎರಡು ನಿಯತ ರೇಖೆಗಳು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು. ಬೇರೊಂದು ಚಲಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಈ ನಿಯತ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕ್ಷ ಮತ್ತು ಯ ಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ

∠ಕ್ಷಮಯ ಇದು ನಿಯತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಅಪ ಮತ್ತು ಅಫ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಕೂಡದು.)

[∠ಕ್ಷಮಯ = ೧/೨ ∠ಪಮಫ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

೯. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಪತ ಮತ್ತು ಫಠ ಎಂಬ ಎರಡು ನಿಯತ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವವು. ಬೇರೊಂದು ಚಲ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು ಪಟ, ಫಠಗಳನ್ನು ಕ್ಷ ಮತ್ತು ಯ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ∠ಕ್ಷಮಯ = ೧ ಕಾಟಕೋನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೦. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಮ ದಲ್ಲಿ ಬಹಿಃಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು. ಒಂದು ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಈ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಪ ಮತ್ತು ಫ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು. ಆದರೆ, ∠ಪಮಫ = ೧ ಕಾಟಕೋನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೧. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಮ ದಲ್ಲಿ ಅಂತಃಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಇನ್ನೊಂದರ ವ್ಯಾಸದಷ್ಟಿದೆ. ಮ ದಿಂದ ಹೊರಟ ರೇಖೆಯು ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಪ ದಲ್ಲಿಯೂ, ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಫ ದಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಮಪ = ಪಫ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೨. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಕೇಂದ್ರ ಇರುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಮ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಮ ದಿಂದ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಯು ಇವುಗಳ ಪರಿಘಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ ಮತ್ತು ಫ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಅಪ ∥ ಬಫ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೩. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ:—

(೧) ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ವರ್ತುಳಗಳು.

(೨) ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ವರ್ತುಳಗಳು.

(೩) ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ವರ್ತುಳಗಳು.

೧೪. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಅ ಮತ್ತು ಬ (ಅ > ಬ) ಇರುವವು. ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಡ (ಡ > ಅ + ಬ) ಇರುವದು. ಆದರೆ,

ಆವುಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಸರಳ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದಳತೆ $= \sqrt{\{ಡ^{೨}-(ಅ-ಬ)^{೨}\}}$
ಮತ್ತು ,, ತಿರ್ಯಕ್ ,, ,, $= \sqrt{\{ಡ^{೨}-(ಅ+ಬ)^{೨}\}}$
ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೫. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಮಬ ವ್ಯಾಸವಿದೆ. ಅಮ ಮತ್ತು ಬಮ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ಮೂರು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ನಾಲ್ಕನೆಯ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಕ್ಷ ಇದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಮಅ = ೨ಅ ಇದ್ದರೆ, ಕ್ಷ = ಕ್ಷಿಅ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

$$\left[\ (ಅ + ಕ್ಷ)^{೨} = ಅ^{೨} + (೨ಅ - ಕ್ಷ)^{೨} \text{ ಹೀಗೆ ಸಮೀಕರಣ ಬರುವದು } \right]$$

೧೬. ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ರೂಪಾಯಿಯು ತಿರುಗುತ್ತಿರುವದು. ಆದರೆ ಅದರ ಕೇಂದ್ರದ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೭. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಇವೆ. ಆ ವರ್ತುಳದ ಯಾವದೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು ಆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವದು. ಆ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ತೆಗೆದ ಬೇರೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

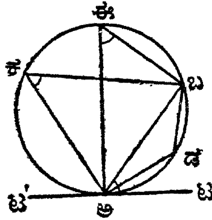
೧೮. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಕಾರಮಾನವಿರುವ ನಾಲ್ಕು ವರ್ತುಳಾಕಾರ ನಾಣ್ಯಗಳು ಒಂದು ಮೇಜಿನ ಮೇಲೆ, ‘ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಾಣ್ಯವು ಬೇರೆ ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಕೇವಲ ಎರಡೇ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವಂತೆ’ ಇಟ್ಟಿರುವವು. ಆದರೆ ನಾಲ್ಕೂ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಮುಂಬಯಿ. ವಿ. ವಿ.).

೨೭ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ವರ್ತುಳಖಂಡದಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳು

ಪ್ರಮೇಯ ೬೨.

ವರ್ತುಳವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡಿದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಷೆಯು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೆಗೆದ ಅದರ ಯಾವದೊಂದು ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯು ಆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಷೆಯೊಡನೆ ಯಾವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದೋ, ಆ ಕೋನಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ವರ್ತುಳ ಖಂಡಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳಷ್ಟು ಇರುವವು. (ಕೆಳಗಿನ ಟಿಪ್ಪಣೆ ನೋಡಿರಿ.)



ಪಕ್ಷ :— $\angle$ ಟ'ಅಟ ರೇಷೆಯು ಅಕಈಬಡ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಅ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡಿದೆ. ಅ ದಿಂದ ಅಬ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಅಬ ದ ವಿರುದ್ಧ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಬರುವಂತೆ ಕ ಮತ್ತು ಡ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಸಾಧ್ಯ :— $\angle$ ಟಅಬ = ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ವರ್ತುಳ ಖಂಡ ಅಕಬ ದಲ್ಲಿಯ $\angle$ ಅಕಬ, ಮತ್ತು

$\angle$ ಟ'ಅಬ = ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ವರ್ತುಳ ಖಂಡ ಅಡಬ ದಲ್ಲಿಯ $\angle$ ಅಡಬ.

ರಚನೆ:— **ಅಈ** ವರ್ತುಳ ವ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಈಬ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಅಟ** ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು **ಅಈ** ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಿದೆ.

∴ ∠ **ಈಅಟ** = ೧ ಕಾಟಕೋನ.

ಮತ್ತು ∠ **ಅಬಈ** = ೧ ಕಾಟಕೋನ (ಅರ್ಧವರ್ತುಳದ ಕೋನ).

△ **ಅಬಈ** ಇದರ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು ೨ ಕಾಟಕೋನಗಳಷ್ಟು; ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ∠ **ಅಬಈ** ಇದು ಒಂದು ಕಾಟಕೋನವು.

∴ ∠ **ಬಅಈ** + ∠ **ಬಈಅ** = ೧ ಕಾಟಕೋನ.

∴ ∠ **ಬಅಈ** + ∠ **ಬಈಅ** = ∠ **ಟಅಈ**

= ∠ **ಟಅಬ** + ∠ **ಬಅಈ**

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಂದ ∠ **ಬಅಈ** ವಜಾ ಮಾಡಿದರೆ,

∠ **ಬಈಅ** = ∠ **ಟಅಬ**

ಪರಂತು, ∠ **ಬಈಅ** = ∠ **ಬಕಅ** (ಒಂದೇ ವ. ಖಂಡದಲ್ಲಿಯ ಕೋನ)

∴ ∠ **ಬಕಅ** = ∠ **ಟಅಬ,**

ಅಂದರೆ ∠ **ಟಅಬ** = ∠ **ಅಕಬ**

ಪುನಃ, ∠ **ಅಡಬ** = ∠ **ಅಕಬ** ದ ಪೂರಕ ಕೋನ

(ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಕೋನ)

∠ **ಟ'ಅಬ** = ∠ **ಟಅಬ** ದ ಪೂರಕ ಕೋನ (ಸಂಲಗ್ನ ಕೋನ)

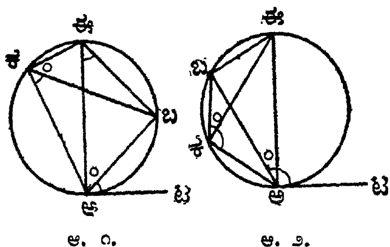
∴ ∠ **ಅಡಬ** = ∠ **ಟ'ಅಬ** (ಸಮಾನ ಕೋನಗಳ ಪೂರಕ ಕೋನ).

ಟಿಪ್ಪಣೆ ೧:—ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ವರ್ತುಳ ಖಂಡಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂಬದನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡಿರಿ. ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಮೇಲೆ ಅಬ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬದಿಯು ಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದರ ಎದುರಿನ ಬದಿಯು ವರ್ತುಳ ಖಂಡಕ್ಕೆ ಅದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ವರ್ತುಳ ಖಂಡ ಅನ್ನುವರು. ಅಂದರೆ ಅಕಬ ಇದು ∠ ಟಅಬ ಇದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ವರ್ತುಳ ಖಂಡವು; ಮತ್ತು ಅಡಬ ಇದು ∠ ಟಅಬ ಇದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ವರ್ತುಳ ಖಂಡವಾಗುವದು.

ಟಿಪ್ಪಣೆ ೨:—ಮೇಲಿನ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಲಘುಕೋನದ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದೆ. ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ ೩ :—ಅಬ ⊥ ಟ'ಅಟ ಇದ್ದರೆ ಎರಡೂ ವರ್ತುಳ ಖಂಡಗಳು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳಗಳಾಗಿರುವವು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳು ಕಾಟಕೋನಗಳಿರುವವು. ಮತ್ತು ಅವು ಅಬ ದಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮಾಡಿದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸರಿ ಇರುವವು. ಅಂದರೆ ಪ್ರಮೇಯವು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದು.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಇನ್ನೊಂದು ಸಿದ್ಧತೆಯು :—



ಆ. ೧. ಆ. ೨.

ಅಬ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯು **ಅಟ** ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ∠ **ಟಅಬ** ಲಘುಕೋನ ಅಥವಾ ವಿಶಾಲ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವದು. ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ವರ್ತುಳ ಖಂಡದ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ **ಕ** ಬಿಂದುವಿದೆ. ಅಈ ವ್ಯಾಸವಿದೆ. **ಈಬ, ಈಕ, ಬಕ** ಕೂಡಿಸಿದೆ.

ಅಂದರೆ, ∠ ಈಕಬ = ∠ ಈಅಬ

ಮತ್ತು ∠ ಈಕಅ = ೧ ಕಾಟಕೋನ (ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳ ಕೋನ)

= ∠ ಈಅಟ (ತ್ರಿಜ್ಯ ⊥ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ)

ಆ. ೧ರಲ್ಲಿ ∠ ಈಕಅ − ∠ ಈಕಬ = ∠ ಈಅಟ − ∠ ಈಅಬ

∴ ∠ ಅಕಬ = ∠ ಟಅಬ.

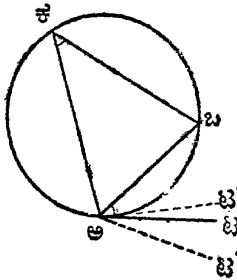
ಆ. ೨ರಲ್ಲಿ ∠ ಈಕಅ + ∠ ಈಕಬ = ∠ ಈಅಟ + ∠ ಈಅಬ

∴ ∠ ಅಕಬ = ∠ ಟಅಬ.

ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ∠ ಟಅಬ = ∠ ಅಕಬ.

ಪ್ರಮೇಯ ೬೪ (ಪ್ರಮೇಯ ೬೨ ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)

ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ಯಾವದೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೆಗೆದ ರೇಷೆಯಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು, ಅದರ ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ವರ್ತುಳ ಖಂಡದಲ್ಲಿಯ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ, ಆ ರೇಷೆಯು ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಷೆಯಿರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯಿದೆ; **ಅಬ**ಕ್ಕೆ **ಅಟ** ರೇಷೆಯು ∠ **ಬಅಟ** ಮಾಡಿದೆ. ಇದು ಅದರ ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ವರ್ತುಳ ಖಂಡದಲ್ಲಿಯ ∠ **ಅಕಬ**ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— **ಅಟ** ರೇಷೆಯು ಅ ದಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಅಟ** ಇದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಷೆ ಇರದಿದ್ದರೆ, **ಅಟ'** ಸ್ಪರ್ಶರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆಗ ∠ **ಬಅಟ'** ಇದಕ್ಕೆ **ಅಕಬ** ಇದು ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ವರ್ತುಳ ಖಂಡ ಆಗಿರಬೇಕು.

∠ **ಬಅಟ'** = ∠ **ಬಕಅ** (ಪ್ರಮೇಯ ೬೨)

ಪರಂತು ∠ **ಬಅಟ** = ∠ **ಬಕಅ** (ಪಕ್ಷ)

∴ ∠ **ಬಅಟ** = ∠ **ಬಅಟ'**

ಇದರಿಂದ ವಸ್ತುವಿನ ಅಂಶವು ಆ ಪೂರ್ಣ ವಸ್ತುವಿಗೆ ಸರಿಯಾಗುವದು; ಆದರೆ ಇದು ಅಶಕ್ಯವು.

∴ **ಅಟ** ಇದು ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಷೆಯಿದೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೦.

೧. ವರ್ತುಳದ ಹೊರಬದಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವಂತೆ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು. ಇದನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ ೬೨ರ ಮೇಲಿಂದ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೨. ಅಬಕ ಇದೊಂದು ಪರಿವೃತ್ತವಿದೆ. ಅ, ಬ, ಕ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಮೂರು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಇನ್ನೊಂದು ಹೊಸ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ಮೂಲ △ ಅಬಕ ಇದರ ಕೋನಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಮಾಡಿರಿ.

೩. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಿಂದ ಲಅಮ ಮತ್ತು ನಬಮ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅವು ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಲ, ಸ ಗಳಲ್ಲಿಯೂ, ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಮ ದಲ್ಲಿಯೂ ಕೂಡುವವು. ಆದರೆ, ಮ ದಲ್ಲಿಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಲನ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ ಮತ್ತು ಅಕ ಸಮಾನ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಅ ದಲ್ಲಿಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಬಕ ಇದು ಸಮಾಂತರವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಉದಾ. ೪ ರಲ್ಲಿ ಅ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬಕ ದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಬ, ಕ ಗಳಲ್ಲಿಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೬. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಅ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವವು. ಅ ದಿಂದ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವು ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಬ ಮತ್ತು ಕ ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಡ ಮತ್ತು ಈ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ ಬಕ || ಡಈ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಅಂತಃಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಬಹಿಃಸ್ಪರ್ಶ ಇವೆರಡನ್ನೂ ವಿಚಾರಿಸಿರಿ.
(ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

೭. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಒಂದು ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಅವುಗಳನ್ನು ಟ ಮತ್ತು ಠ ಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು. ಆದರೆ ∠ ಟಅಠ ಮತ್ತು ∠ ಟಬಠ ಇವು ಪೂರಕ ಕೋನಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೮. ಒಂದು ಸಮಲಂಬದಲ್ಲಿ ಅಬ, ಕಡ ಇವು ಸಮಾಂತರವಿದ್ದ ಭುಜಗಳು.

ಅಕ, ಬಡ ಇವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಮ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ ಅಮಬ ಮತ್ತು ಕಮಡ ವರ್ತುಳಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೯. ಅಬಕಡ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳಿಗೆ ಮ ಇದೊಂದು ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿದೆ. ಆದರೆ, ಅಮಬ, ಕಮಡ ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಮ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೦. ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಬಕ ರೇಖೆಗೆ ಅಈ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು (ಬೆಳಿಸದಿರುವ) ಬಡ ಕ್ಕೆ ಈ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ, ಅಕ ರೇಖೆಯು ಅಬಈ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಅ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೧. ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಕ ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಅಬ ಕ್ಕೆ ಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ವರ್ತುಳವು ಬಡ ಇದನ್ನು ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ, △ ಈಕಡ ಮತ್ತು △ ಬಕಅ ಇವು ಮಿಥಃ ಸಮಕೋನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೨. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಮ ದಲ್ಲಿ ಅಂತಃಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವವು. ದೊಡ್ಡ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಅಬ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯು ಸಣ್ಣ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು. ಆದರೆ ಮಕ ರೇಖೆಯು ಅಮಬ ಕೋನವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೩. △ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ ∠ ಅ ಕಾಟಕೋನವಿದೆ. ಅಡ ⊥ ಬಕ. ಆದರೆ ಅಬಡ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ರೇಖೆಯು ಅಕ ಇದನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿ ಸುವದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೪. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅಪ, ಅಫ ಇವೆರಡು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಅಮ ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳ ಪರಿಘವನ್ನು ಯ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಬಯ ರೇಖೆಯು ∠ ಅಪಫ ಇದನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಬೆಳಿಸಿದ ಅಮ ರೇಖೆಯು ಪರಿಘವನ್ನು ನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಪನ ಇದು ∠ ಅಪಫ ಇದರ ಬಹಿರ್ದ್ವಿಭಾಜಕವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೫. ವರ್ತುಳದ ಹೊರಬದಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಪ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಪಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಯನ್ನೂ ಪಅಬ ಛೇದಕ ರೇಖೆಯನ್ನೂ ತೆಗೆಯಿರಿ. ∠ ಅಟಬ ಇದರ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಅಬ ಕ್ಕೆ ಕ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ, ಪಟ = ಪಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೩. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಅಬ ಕಂಸದಲ್ಲಿ, ಅಪ ಕಂಸವು, ಬಪ ಕಂಸದ ಇಮ್ಮಡಿ ಯಾಗುವಂತೆ ಪ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಪ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ರೇಖೆಯು ಬೆಳೆಸಿದ ಅಬ ಇದನ್ನು ರ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಮತ್ತು ಅಬ ದ ಮೇಲೆ ಅ ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಲಂಬವನ್ನು ಫ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಪಫ = ಪರ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

೧೭. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಪಫ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆ, ಮತ್ತು ಪರ ವ್ಯಾಸ ಇರುವವು. ಫ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪಸ ಲಂಬ ತೆಗೆದರೆ, ಅದು ∠ ಸಫರ ಇದನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

೧೮. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಮ ಕೇಂದ್ರವೂ, ಅಬ ವ್ಯಾಸವೂ ಇರುವವು. ಅಬ ದ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗುಲಿಗಿರುವ ಅಕ ಮತ್ತು ಬಡ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಈ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ ಕ, ಡ, ಈ ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಮಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

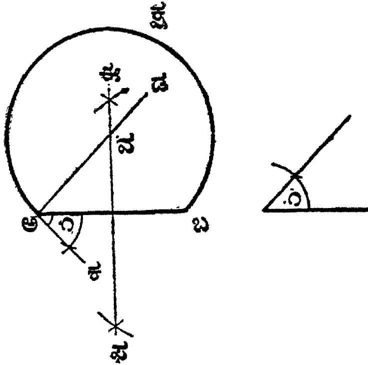
೧೯. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಅ ದಲ್ಲಿ ಬಹಿಃಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವವು. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಬಕ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕ ದ ಕಡೆಗೆ ಬೆಳೆಸಿದರೆ ಅದು ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಡ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವದು. ಬಅ ಬೆಳೆಸಿದರೆ, ಅದು ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಡ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವದು. ಬಅ ಬೆಳೆಸಿದರೆ ಅದು ಎರಡನೆಯ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಈ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಅಡ ರೇಖೆಯು ∠ ಕಈಡ ಇದನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨೦. △ ಅಬಕ ಇದರ ಅಂತರ್ವೃತ್ತ ಬಕ, ಕಅ, ಅಬ ಭುಜಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಡ, ಈ, ಫ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವದು. △ ಡಈಫ ಇದರ ಕೋನಗಳು △ ಅಬಕ ಇದರ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುವ ಕೋನಗಳ ಕೋಟಿ ಕೋನಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

ಕೃತ್ಯ ೧೯.

ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಖಂಡವನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಸರಳ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಅದರೊಳಗಿನ ಕೋನವು ಕೊಟ್ಟ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ತೆಗೆಯುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ಅಬ ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ರೇಷೆಯಿದೆ; ಮತ್ತು $\angle$೧ ಇದು ಕೊಟ್ಟ ಕೋನವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— ಅಬ ಇದು ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯಾಗಿ ಆದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಖಂಡವನ್ನು, ಅದರಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು $\angle$೧ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ, ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ:— ಅಬದ ಅ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\angle$೧ರಷ್ಟು $\angle$**ಬಅಕ** ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಕ** ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಅ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ **ಅಡ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಬ**ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವಾದ **ಈಫ** ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ಅಡ** ರೇಷೆಯನ್ನು **ವ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ವ** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ **ವಅ** ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಬ**ದಲ್ಲಿ **ಬಅಕ** ಕೋನವಿರುವ ಮಗ್ಗಲಿನ ವಿರುದ್ಧ

ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಇರುವ **ಅಕ್ಷಬ** ವರ್ತುಳ ಖಂಡವು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳ ಖಂಡವಾಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ :— ವ ಬಿಂದುವು ಅಬದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದಲ್ಲಿದೆ.

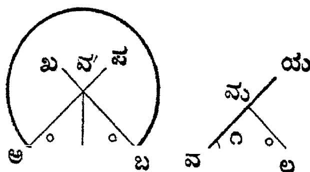
∴ **ವಅ = ವಬ.**

∴ (**ವ, ವಅ**) ಈ ವರ್ತುಳವು **ಬ** ದಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವದು.
ವಅ ⊥ ಅಕ (ರಚನೆ)

∴ **ಅಕ** ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಅ** ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವದು.

∴ ∠**ಕಅಬ = ಅಕ್ಷಬ** ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ವರ್ತುಳ ಖಂಡದೊಳಗಿನ ಕೋನ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಅಕ್ಷಬ** ಇದು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳ ಖಂಡವಿದೆ.

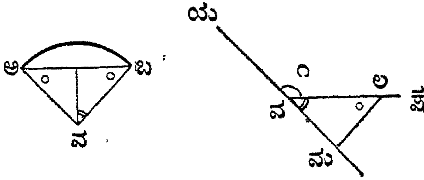
ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯು :—



∠**ಕ್ಷವಯ** ಕೊಟ್ಟ ಕೋನವಿದೆ; **ಅಬ** ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಯಿದೆ. **ವಕ್ಷ** ದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು **ಲ** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಲಮ ⊥ ವಯ** ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಬ** ದ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ **ಬಅಷ, ಅಬಖ** ಕೋನಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ∠**ವಲಮ** ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಷ, ಬಖ** ಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು **ವ'** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. **ವ'** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ **ವ'ಅ** ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ವ'ಅ = ವ'ಬ** ಇರುವದರಿಂದ ಈ ವರ್ತುಳವು **ಬ** ದಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವದು. ಕೊಟ್ಟ ∠೧ ಇದು ಲಘುಕೋನ ಇದ್ದರೆ, ವರ್ತುಳದ ಮಹಾನ ವರ್ತುಳಖಂಡವು ಇಷ್ಟ ವ. ಖಂಡ ಆಗುವದು.

∠೧ ಇದು ವಿಶಾಲ ಕೋನ ಇದ್ದರೆ, ಲಘು ವರ್ತುಳ ಖಂಡವು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳ ಖಂಡ ಆಗುವದು.

[ಇದರ ಮುಂದಿನ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ನೀವು ಮಾಡಬೇಕು.]



ಟಿಪ್ಪಣಿ :— ∠೧ ಇದು ಕಾಟಕೋನವಿದ್ದರೆ, ಅಬ ವ್ಯಾಸ ಇರುವ ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳವು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳ ಖಂಡ ಆಗುವದು. ∠೧ ಇದು ವಿಶಾಲಕೋನ ಇದ್ದರೆ, ಇಂಥ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾದ ಕೋನವುಳ್ಳ ವರ್ತುಳ ಖಂಡವನ್ನು ತೆಗೆಯಲಿಕ್ಕೆ ಬರಲಾರದು.

ಉದಾ :—ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗುವ ಕೋನ ವುಳ್ಳಂಥ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಖಂಡವನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೧.

೧. ತಳರೇಖೆ, ಶಿರೋಕೋನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು, ಇವುಗಳಿಂದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ:-

(೧) ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜ;

(೨) ಎತ್ತರ ಇಲ್ಲವೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ;

(೩) ತಳರೇಖೆಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವ ಮಧ್ಯರೇಖೆ;

(೪) ಎತ್ತರದ ಪದಬಿಂದು;

(೫) ಶಿರೋಕೋನದ ಅಂತರ್ದ್ವಿಭಾಜಕವು ತಳರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸುವಂಥ ಛೇದನ ಬಿಂದು.

೨. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಮ ಇದು ಕೇಂದ್ರವೂ, ಪ ಇದು ಅದರ ಹೊರ ಬದಿಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವೂ ಆಗಿವೆ. ಪ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅದು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಖಂಡವನ್ನು ಮಾಡುವದು; ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು ಕೊಟ್ಟ ∠ಅ ದಷ್ಟು ಆಗುವದು.

[ಮಪ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ೯೦°+ ∠ ಅ ದಷ್ಟು ಕೋನ ಇರುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಖಂಡವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಇದು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಬ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಪಬ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಕ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಬೆಳೆಸಿರಿ.]

೩. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಗತಿಗಳಿಂದ △ ಅಬಕ ರಚಿಸಿರಿ:—

(೧) ಬಕ, ∠ ಅ, ಕಅ + ಅಬ;

(೨) ಬಕ, ∠ ಅ, ಅಬ − ಕಅ.

[ಬಕ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಕೋನ ∠ ಅ ದಷ್ಟು ಕೋನ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಖಂಡ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದಕ್ಕೆ ಖ ಎಂದು ಕರೆಯಿರಿ.

(೧) ಬಕ ದ ಮೇಲೆ ½ ∠ ಅ ದಷ್ಟು ಕೋನ ಆಗುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಗ ವರ್ತುಳ ಖಂಡವನ್ನೂ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಬ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಕಅ + ಬಅ ದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ವರ್ತುಳವು ಗ ಇದನ್ನು ಡ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಡಬ ರೇಖೆಯು ಖ ಇದನ್ನು ಅ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಅಕ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ ಅಬಕ ಇದು ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಎರಡು ಉತ್ತರಗಳು ಬರುವವು; ಅಥವಾ ಒಂದೇ ಉತ್ತರ ಬರುವದು; ಇಲ್ಲವೇ ಉತ್ತರ ಕೊಡಲಿಕ್ಕೆ ಬರಲಾರದು.

ಎರಡನೆಯ ರೀತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಪುಟ ೬೮ ರಲ್ಲಿಯ (೫) ಮತ್ತು (೬) ಕೃತ್ಯಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

(೨) ಬಕ ದ ಮೇಲೆ ೯೦° + ½ ∠ ಅ ದಷ್ಟು ಕೋನ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಘ ವರ್ತುಳಖಂಡವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ಅಬ − ಅಕ ಇಷ್ಟು ಬಈ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಬಈ ಬೆಳೆಸಿರಿ, ಅಂದರೆ ಅದು ಖಕ್ಕೆ ಅ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಇದರಿಂದ ಅಬಕ ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.]

೪. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಯ ಮೇಲಿಂದ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ:—

(೧) ಬಕ ತಳರೇಖೆ, ಅಲ ಎತ್ತರ, ಮತ್ತು ಅಕ ದ ಮೇಲೆ ಬ ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಬಮ ಲಂಬ.

(೨) ತಳರೇಖೆ ಬಕ, ಮತ್ತು ಅಕ, ಅಬ ಮೇಲಿನ ಲಂಬ ಬಮ, ತನ.

(೩) ತಳರೇಖೆ ಬಕ, ಮಧ್ಯರೇಖೆ ಬಈ, ಮತ್ತು ಅಕ ಮೇಲಿನ ಲಂಬ ಬಮ.

(೪) ತಳರೇಖೆ ಬಕ, ಮಧ್ಯರೇಖೆ ಅಡ ಮತ್ತು ಅಕ ಮೇಲಿನ ಲಂಬ ಬಮ.

(೫) ಅಬ, ಅಕ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅಕ ಮೇಲಿನ ಲಂಬ ಬಮ.

೫. ಬಕ ತಳರೇಷೆಯನ್ನೂ, ∠ ಅ ಶಿರೋಕೋನವನ್ನೂ, ಬಈ ಮಧ್ಯರೇಷೆಯನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟದ್ದುಂಟು. ಇದರಿಂದ △ ಅಬಕ ಇದನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

[ಬಕ ದಷ್ಟು ಒಂದು ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲೆ ∠ ಅ ದಷ್ಟು ಕೋನವುಳ್ಳ ಖ ವರ್ತುಳ ಖಂಡವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಬಕ ಇದನ್ನು ಡ ದಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ. ಡಕ ದ ಮೇಲೆ ∠ ಅ ದಷ್ಟು ಕೋನವುಳ್ಳ ಗ ವರ್ತುಳ ಖಂಡವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಬ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಬಈ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಗ ಕ್ಕೆ ಈ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಕಈ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಖ ಕ್ಕೆ ಅ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಬೆಳೆಸಿರಿ. ಅಬಕ ಇದು ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.]

೬. ಪರಿಮಿತಿ, ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಶಿರೋಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಅದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಿರಿ.

೭. ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳಿಂದ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾನ ಆಗಿರಬೇಕು.

೮. ಕ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನೂ ಅದರ ಹೊರಗೆ ಅ ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅ ದಿಂದ ಒಂದು ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದೋ, ಆ ಛೇದಕ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಕ ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವು ಕಾಟಕೋನ ಆಗಿರಬೇಕು.

*೯. ಅಬಕ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅ ಬಿಂದುವು ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಏಕರೂಪವಾಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು ಬ, ಕ ಬಿಂದುಗಳು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘದಲ್ಲಿರಬೇಕು.

---

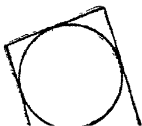
೨೮ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ಅಂತರ್ಗತ, ಬಹಿರ್ಗತ, ಪರಿಗತ ಆಕೃತಿಗಳು

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಅಂತರ್ಗತ ಸರಳ ರೇಖಾಕೃತಿಯ ವಿಷಯವನ್ನು ನಾವು ಈ ಮೊದಲು ಅರಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. (ಪುಟ ೧೨೫ ನೋಡಿರಿ.)

ಸರಳ ರೇಖಾಕೃತಿಯ **ಪ್ರತಿಯೊಂದು** ಭುಜವು ಒಂದು ವಿವಕ್ಷಿತ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ವರ್ತುಳದ ಸುತ್ತಲು ತೆಗೆದ (described about a circle) ಸರಳ ರೇಖಾಕೃತಿ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು; ಇಲ್ಲವೆ ಆ ಸರಳ ರೇಖಾಕೃತಿಯು ವರ್ತುಳದ **ಪರಿಗತ** (is circumscribed to a circle) ಇರುವದು ಎಂದೆನ್ನುವರು.



ಈ ಚೌಕೋನವು
ವರ್ತುಳ ಪರಿಗತವಿದೆ.



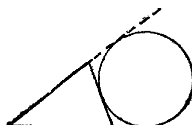
ಈ ಪಂಚಕೋನವು
ವರ್ತುಳದ ಪರಿಗತವಲ್ಲ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರೂ ಭುಜಗಳಿಗೆ (ಅವುಗಳನ್ನು ಬೆಳಿಸದಿದ್ದರೆ) ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ತ್ರಿಕೋನದ **ಅಂತರ್ಗತ ವರ್ತುಳ** ಅಥವಾ **ಅಂತರ್ವೃತ್ತ** (Inscribed circle or in-circle) ಅನ್ನುವರು.

ತ್ರಿಕೋನದ (ಬೆಳಿಸದಿರುವ) ಯಾವದೊಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಮತ್ತು ಅದರ ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಬೆಳಿಸಿದರೆ ಆ ಬೆಳಿಸಿದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ತ್ರಿಕೋನದ **ಬಹಿರ್ಗತ ವರ್ತುಳ** ಅಥವಾ **ಬಹಿರ್ವೃತ್ತ** (escribed circle or e-circle) ಅನ್ನುವರು.



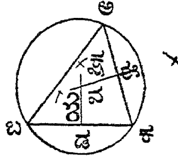
ಅಂತರ್ವೃತ್ತ



ಬಹಿರ್ವೃತ್ತ

ಕೃತ್ಯ ೨೦.

ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.



ಪಕ್ಷ :— ಅಬಕ ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— **ಅ, ಬ, ಕ** ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ :— ಬಕದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ **ಡಕ್ಷ** ತೆಗೆಯಿರಿ.
ಅಕದ ,, ,, **ಈಯ** ,,
ಅವು **ವ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು.

(**ಬಕ, ಅಕ** ಸಮಾಂತರಗಳಲ್ಲ; ಆದ್ದರಿಂದ **ಡಕ್ಷ, ಈಯ** ಇವೂ ಸಮಾಂತರಗಳಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವವು.)

ವ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ **ವಅ** ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ಬ** ಮತ್ತು **ಕ**ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳ ಆಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ :— **ಬಕ**ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವು **ಬ** ಮತ್ತು **ಕ**ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು.
ವ ಇದು **ಬಕ**ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದಲ್ಲಿಯ ಬಿಂದು ಇರುವದು.
∴ **ವಬ = ವಕ.**

ಅದರಂತೆ, **ವ** ಇದು **ಅಕ**ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕವಾದ **ಈಯ**ದ ಮೇಲೆ ಇರುವದು.

∴ ವಕ = ವಅ

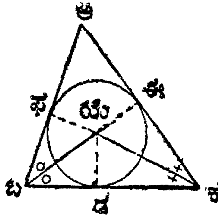
∴ ವಅ = ವಬ = ವಕ

∴ (ವ, ವಅ) ವರ್ತುಳವು ಅ, ಬ, ಕ ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ :— ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವವು. ಯಾಕಂದರೆ, ವಅ = ವಬ ಇರುವದ ರಿಂದ ವ ಬಿಂದುವು ಅಬ ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇರಲೇ ಬೇಕು.

ಕೃತ್ಯ ೨೧.

ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್ವೃತ್ತ ತೆಗೆಯುವದು.



ಪಕ್ಷ :— **ಅಬಕ** ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್ವೃತ್ತ ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ :— ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯ ∠ **ಬ** ಮತ್ತು ∠ **ಕ** ಕೋನಗಳನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು **ಯ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. **ಬಕ** ದ ಮೇಲೆ **ಯಡ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಯ** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ **ಯಡ** ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳ ಆಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ :— **ಅಕ** ದ ಮೇಲೆ **ಯಈ** ಮತ್ತು **ಅಬ** ದ ಮೇಲೆ **ಯಫ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಯುಬಡ, ಯುಬಫ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

$\left\{ \begin{array}{ll} \angle \text{ಯುಬಡ} = \angle \text{ಯುಬಕ} & \text{(ರಚನೆ)} \\ \angle \text{ಯುಡಬ} = \angle \text{ಯುಫಬ} & \text{(ಕಾಟಕೋನ)} \\ \text{ಯುಬ} = \text{ಯುಬ} & \text{(ಸಾಧಾರಣ)} \end{array} \right.$

∴ **ಯುಬಡ, ಯುಬಫ** ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇವೆ.

∴ **ಯುಡ** = **ಯುಫ**; ಅದರಂತೆ **ಯುಡ** = **ಯುಈ.**

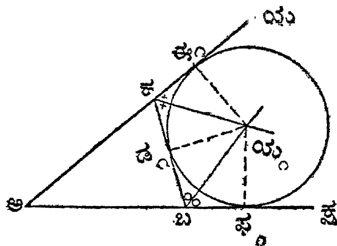
ಆದ್ದರಿಂದ (**ಯು, ಯುಡ**) ವರ್ತುಳವು **ಡ, ಈ, ಫ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು. ಮತ್ತು ∠ ಡ, ∠ **ಈ**, ∠ **ಫ** ಇವು ಕಾಟಕೋನಗಳು ; ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೇಲಿನ ವರ್ತುಳವು **ಬಕ, ಕಅ, ಅಬ** ಇವುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಡ, ಈ, ಫ** ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.

∴ **ಡಈಫ** ಇದು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳ ಇರುವದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ:—ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಅಂತರ್ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವವು.

ಕೃತ್ಯ ೨೨.

ತ್ರಿಕೋನದ ಬಹಿರ್ವೃತ್ತ ತೆಗೆಯುವದು.



ಪಕ್ಷ :— ಅಬಕ ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ :— ಅಬ, ಅಕ ಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಕ್ಷ** ಮತ್ತು **ಯ** ವರೆಗೆ ಬೆಳಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ, ಮತ್ತು **ಬಕ** ಭುಜಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ :— **ಕಬಕ್ಷ, ಬಕಯ** ಕೋನಗಳನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವ ರೇಖೆ ಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು **ಯ್ಯ೧** ಬಿಂದುವಿ ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು.

ಬಕದ ಮೇಲೆ **ಯ್ಯ೧ಡ೧** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(**ಯ್ಯ೧, ಯ್ಯ೧ಡ೧**) ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಅದು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳ ಆಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ :— **ಯ್ಯ೧ಈ೧, ಯ್ಯ೧ಫ೧** ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಅಯ, ಅಕ್ಷ**ಗಳ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಯ್ಯ೧ಬಡ೧ ಮತ್ತು **ಯ್ಯ೧ಬಫ೧** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle$ **ಯ್ಯ೧ಬಡ೧** = $\angle$ **ಯ್ಯ೧ಬಫ೧** (ರಚನೆ)

$\angle$ **ಡ೧** = $\angle$ **ಫ೧** (ಕಾಟಕೋನ)

ಯ್ಯ೧ಬ = **ಯ್ಯ೧ಬ** (ಸಾಧಾರಣ)

∴ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುವವು.

∴ **ಯ$_೧$ಡ$_೧$** = **ಯ$_೧$ಫ$_೧$**

ಅದರಂತೆ **ಯ$_೧$ಡ$_೧$** = **ಯ$_೧$ಈ$_೧$**

∴ (**ಯ$_೧$**, **ಯ$_೧$ಡ$_೧$**) ವರ್ತುಳವು **ಡ$_೧$**, **ಈ$_೧$**, **ಫ$_೧$** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.

ಮತ್ತು ∠**ಡ$_೧$**, ∠**ಈ$_೧$**, ∠**ಫ$_೧$**, ಇವು ಕಾಟಕೋನಗಳಿರುವದರಿಂದ, ಈ ವರ್ತುಳವು **ಬಕ**, **ಕಯ**, **ಬಕ** ಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಡ$_೧$**, **ಈ$_೧$**, **ಫ$_೧$** ಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವದು.

∴ **ಡ$_೧$ಈ$_೧$ಫ$_೧$** ಇದು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳವಾಯಿತು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಎರಡು ಬಹಿರ್ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು :—

(೧) **ಕಅ** ಭುಜಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಬೆಳೆಸಿದ **ಬಅ**, **ಬಕ** ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ; ಮತ್ತು

(೨) ಅಬ ಭುಜಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಬೆಳೆಸಿದ **ಕಬ**, ಕಅ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ.

ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಮೂರು ಬಹಿರ್ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ :—ತ್ರಿಕೋನದ್ದೊಂದು ಕೋನದ ಅಂತರ್ದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಷೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಬಹಿರ್ದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಷೆಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವವು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :—ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ **ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ** ಅಥವಾ **ಅಂತಃಮರ್ಧ್ಯ** ಅನ್ನುವರು. ಮತ್ತು ಬಹಿರ್ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ **ಬಹಿಃಕೇಂದ್ರ** ಅಥವಾ **ಬಹಿರ್ಮಧ್ಯ** ಅನ್ನುವರು.

ಲೇಖನ ಪದ್ಧತಿ.

ಅಂತರ್ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು **ರ** ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಬರೆದು ತೋರಿಸುವರು.

ಬೆಳಿಸಿದ **ಅಬ**, **ಅಕ**ಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಬಹಿರ್ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು **ರ**$_{೧}$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವರು.

ಬೆಳಿಸಿದ **ಬಕ**, **ಬಅ**ಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಬಹಿರ್ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು **ರ**$_{೨}$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವರು.

ಬೆಳಿಸಿದ **ಕಅ**, **ಕಬ**ಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಬಹಿರ್ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು **ರ**$_{೩}$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವರು.

(**ಯ, ರ**) ವರ್ತುಳದ **ಬಕ**, **ಕಅ**, **ಅಬ**ಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅನು. **ಡ**, **ಈ**, **ಫ** ಹೀಗೆ ತೋರಿಸುವರು.

(**ಯ**$_{೧}$, **ರ**$_{೧}$) ವರ್ತುಳದ **ಬಕ**, **ಕಅ**, **ಅಬ**ಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅನು. **ಡ**$_{೧}$, **ಈ**$_{೧}$, **ಫ**$_{೧}$ ಹೀಗೆ ತೋರಿಸುವರು.

(**ಯ**$_{೨}$, **ರ**$_{೨}$) ವರ್ತುಳದ **ಬಕ**, **ಕಅ**, **ಅಬ**ಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅನು. **ಡ**$_{೨}$, **ಈ**$_{೨}$, **ಫ**$_{೨}$ ಹೀಗೆ ತೋರಿಸುವರು.

(**ಯ**$_{೩}$, **ರ**$_{೩}$) ವರ್ತುಳದ **ಬಕ**, **ಕಅ**, **ಅಬ**ಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅನು. **ಡ**$_{೩}$, **ಈ**$_{೩}$, **ಫ**$_{೩}$ ಹೀಗೆ ತೋರಿಸುವರು.

ಈ ಲೇಖನ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳಗಳ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಕೆಲವು ರೇಖಾಮಾನಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

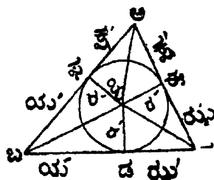
ಅಂತರ್ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಬಹಿರ್ವೃತ್ತ ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಕೆಲವು ರೇಖಾಮಾನಗಳು :—

[೧] **ಅಈ = ಅಫ = ಸ′ − ಅ′**

ಬಡ = ಬಫ = ಸ′ − ಬ′

ಕಡ = ಕಈ = ಸ′ − ಕ′

[ಹೀಗೆ ತೋರಿಸಬೇಕು.]



ಅಈ, ಅಫ ಅಂತರ್ವೃತ್ತದ ಅ ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು, ಸಮಾನ ಇರುವವು. ಅವುಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು **ಕ್ಷ** ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಅದರಂತೆ **ಬಡ = ಬಫ = ಯ′** ಮತ್ತು **ಕಡ = ಕಈ = ಝ′** ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಬಕ, ಕಅ, ಅಬ** ಇವುಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಅ′, ಬ′, ಕ′** ಹೀಗೆ ಬರೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಮಿತಿಯ ಅರ್ಧ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು **ಸ′** ಹೀಗೆ ತೋರಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ, **ಸ′** = ೧/೨ (ಅ′ + ಬ′ + ಕ′)
= ೧/೨ { **ಯ′**+**ಝ′**)+(**ಝ′**+**ಕ್ಷ′**)+(**ಕ್ಷ′**+**ಯ′**) }
= **ಕ್ಷ′** + **ಯ′** + **ಝ′**.

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಕ್ಷ′** = **ಸ′** − (**ಯ′** + **ಝ′**) = **ಸ′** − **ಅ′**

ಅದರಂತೆ, **ಯ** = **ಸ′** − **ಬ′**; **ಝ′** = **ಸ′** − **ಕ′**.

[೨] ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು Δ ಹೀಗೆ ತೋರಿಸಿದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು Δ ರ′ಸ′ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

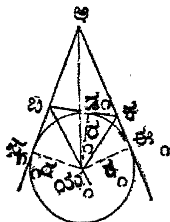
Δ = Δ **ಯಬಕ** + Δ **ಯಕಅ** + Δ **ಯಅಬ**
= ೧/೨ ಅ′ರ′ + ೧/೨ ಬ′ರ′ + ೧/೨ ಕ′ರ′
= ೧/೨ ರ′ (ಅ′ + ಬ′ + ಕ′)
= ರ′ಸ′

$\therefore$ Δ = ರ′ಸ′

ಅಥವಾ,

ರ′ = $\frac{\Delta}{\text{ಸ′}}$

[೩] ಅ ದ ಎದುರಿನ ಬಹಿರ್ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ,



ಅಈ$_0$ = **ಅಫ**$_0$ = **ಸ′**
ಬಡ$_0$ = **ಬಫ**$_0$ = **ಸ′** − **ಕ′**
ಕಡ$_0$ = **ಕಈ**$_0$ = **ಸ′** − **ಬ′**

[ಹೀಗೆ ತೋರಿಸಬೇಕು.]

ಅಈ$_0$ = **ಅಕ** + **ಕಈ**$_0$ = **ಅಕ** + **ಕಡ**$_0$ = **ಬ′** + **ಕಈ**$_0$
ಅಫ$_0$ = **ಅಬ** + **ಬಫ**$_0$ **ಅಬ** + **ಬಡ**$_0$ = **ಕ′** + **ಬಡ**$_0$

$$\therefore\ \text{ಅಈ}_{೧}+\text{ಅಫ}_{೧}=\text{ಬ}'+\text{ಕ}'+(\text{ಬಡ}_{೧}+\text{ಕಡ}_{೧})=\text{ಬ}'+\text{ಕ}'+\text{ಅ}'$$

$$\therefore\ ೨\text{ಅಈ}_{೧}=೨\text{ಸ}'\ (\because \text{ಅಈ}_{೧}=\text{ಅಫ}_{೧})\ \therefore \text{ಅಈ}_{೧}=\text{ಅಫ}_{೧}=\text{ಸ}'.$$

ಮತ್ತು $\text{ಬಡ}_{೧}=\text{ಬಫ}_{೧}=\text{ಅಫ}_{೧}-\text{ಅಬ}=\text{ಸ}'-\text{ಕ}'$

$$\text{ಕಡ}_{೧}=\text{ಕಈ}_{೧}=\text{ಅಈ}_{೧}-\text{ಅಕ}=\text{ಸ}'-\text{ಬ}'$$

[೪] $\Delta=\text{ರ}_{೧}(\text{ಸ}'-\text{ಅ}')=\text{ರ}_{೨}(\text{ಸ}'-\text{ಬ}')=\text{ರ}_{೩}(\text{ಸ}'-\text{ಕ}')$ ಹೀಗೆ ತೋರಿಸಬೇಕು.

$$\Delta=\Delta\,\text{ಅಬಕ}=\Delta\,\text{ಅಬಯ}_{೧}+\Delta\,\text{ಅಕಯ}_{೧}-\Delta\,\text{ಬಕಯ}_{೧}$$
$$=\tfrac{೧}{೨}\text{ಅಬ}\cdot\text{ಯ}_{೧}\text{ಫ}_{೧}+\tfrac{೧}{೨}\text{ಅಕ}\cdot\text{ಯ}_{೧}\text{ಈ}_{೧}-\tfrac{೧}{೨}\text{ಬಕ}\cdot\text{ಯ}_{೧}\text{ಡ}_{೧}$$
$$=\tfrac{೧}{೨}\text{ಕ}'\cdot\text{ರ}_{೧}+\tfrac{೧}{೨}\text{ಬ}'\cdot\text{ರ}_{೧}-\tfrac{೧}{೨}\text{ಅ}'\cdot\text{ರ}_{೧}$$
$$=\tfrac{೧}{೨}\text{ರ}_{೧}(\text{ಕ}'+\text{ಬ}'-\text{ಅ}')$$

ಪರಂತು $೨\text{ಸ}'-೨\text{ಅ}'=\text{ಅ}'+\text{ಬ}'+\text{ಕ}'-೨\text{ಅ}'=\text{ಬ}'+\text{ಕ}'-\text{ಅ}'$

$$\therefore\ \text{ಸ}'-\text{ಅ}'=\tfrac{೧}{೨}(\text{ಬ}'+\text{ಕ}'-\text{ಅ}')$$
$$\therefore\ \Delta=\text{ರ}_{೧}(\text{ಸ}'-\text{ಅ}')$$

ಇದೇ ಕ್ರಮವಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಎರಡು ಬಹಿರ್ವೃತ್ತಗಳ ಮೇಲಿಂದ ನಾವು ಹೀಗೆ ತೋರಿಸಬಹುದು:—

$$\Delta=\text{ರ}_{೨}(\text{ಸ}'-\text{ಬ}');\qquad \Delta=\text{ರ}_{೩}(\text{ಸ}'-\text{ಕ}')$$

$$\therefore\ \text{ರ}_{೧}=\frac{\Delta}{\text{ಸ}'-\text{ಅ}'},\ \ \text{ರ}_{೨}=\frac{\Delta}{\text{ಸ}'-\text{ಬ}'},\ \ \text{ರ}_{೩}=\frac{\Delta}{\text{ಸ}'-\text{ಕ}'}$$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೨.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಲೇಖನ ಪದ್ಧತಿಯು ಪುಟ ೧೮೦ ರಲ್ಲಿಯ ಲೇಖನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿದೆ.

೧. $\text{ಡಡ}_{೧}$ ಇದರ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವು ಬಕ ಇದಕ್ಕೂ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

೨. $\text{ಈಈ}_{೧}=\text{ಫಫ}_{೧}=\text{ಬಕ}$; $\text{ಈ}_{೨}\text{ಈ}_{೩}=\text{ಬಕ}$;

$\text{ಈ}_{೧}\text{ಈ}_{೨}=\text{ಈಈ}_{೩}=\text{ಅಬ}$; $\text{ಈ}_{೧}\text{ಈ}_{೩}=\text{ಅಬ}+\text{ಬಕ}$;

$\text{ಈಈ}_{೨}=\text{ಅಬ}\sim\text{ಬಕ}$; $\text{ಡಡ}_{೧}=\text{ಅಬ}\sim\text{ಅಕ}$.

೩. ಅ, ಯ, ಯ$_೧$ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿವೆ.

೪. ಯ$_೨$, ಅ, ಮತ್ತು ಯ$_೩$ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿವೆ.

೫. $\triangle$ಡಈಫ ಇದರ ಕೋನ $\frac{೧}{೨}(\angle$ಬ$+\angle$ಕ$)$, $\frac{೧}{೨}(\angle$ಕ$+\angle$ಅ$)$, $\frac{೧}{೨}(\angle$ಅ$+\angle$ಬ$)$ ಹೀಗಿರುವವು.

೬. $\triangle$ಡ$_೧$ಈ$_೧$ಫ$_೧$ ಇದರ ಕೋನಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೯೦$^\circ + \frac{೧}{೨}\angle$ಅ, $\frac{೧}{೨}\angle$ಬ, $\frac{೧}{೨}\angle$ಕ ಹೀಗಿರುವವು.

೭. $\triangle$ಯ$_೧$ಯ$_೨$ಯ$_೩$ ಇದರ ಕೋನಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ
$\frac{೧}{೨}(\angle$ಬ$+\angle$ಕ$)$, $\frac{೧}{೨}(\angle$ಕ$+\angle$ಅ$)$, $\frac{೧}{೨}(\angle$ಅ$+\angle$ಬ$)$
ಹೀಗಿರುವವು.

೮. $\triangle$ಯಯ$_೩$ಯ$_೨$ ಇದರ ಕೋನಗಳು ೯೦$^\circ + \frac{೧}{೨}\angle$ಅ, $\frac{೧}{೨}\angle$ಬ, $\frac{೧}{೨}\angle$ಕ ಹೀಗಿರುವವು.

೯. $\angle$ಫಡಈ $+ \angle$ಫ$_೧$ಡ$_೧$ಈ$_೧$ = ೧೮೦$^\circ$;
$\angle$ಡಈಫ $+ \angle$ಡ$_೧$ಈ$_೧$ಫ$_೧$ = ೯೦$^\circ$.

೧೦. $\angle$ಯ$_೩$ಯ$_೧$ಯ$_೨$ $+ \angle$ಯ$_೨$ಯಯ$_೩$ = ೧೮೦$^\circ$;
$\angle$ಯ$_೧$ಯ$_೨$ಯ$_೩$ $+ \angle$ಯಯ$_೩$ಯ$_೨$ = ೯೦$^\circ$.

೧೧. ಯ, ಯ$_೧$, ಯ$_೨$, ಯ$_೩$ ಈ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಉಳಿದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಬಿಂದುವು ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬ ಸಂಪಾತ ಇರುವದು.

೧೨. ಯಬ^೨ − ಯಕ^೨ = ಬಕ (ಬಡ + ಡಕ) = ಬಕ (ಬಅ − ಅಕ) ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೩. ಅಯ ಬೆಳೆಸಿದರೆ ಅದು ಬಕಕ್ಕೆ ಹ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ, $\odot$ ಅಬಕ ಇದನ್ನು ಖ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ ಬಂದು ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ, ಕಖ = ಬಖ = ಯಖ = ಖಯ$_೧$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಬಖ ರೇಖೆಯು $\odot$ ಅಬಹಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೪. ಬ, ಯ, ಕ, ಯ$_೧$ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೫. ಯು ಬಿಂದುವು ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಮಧ್ಯಕ್ಕೆ ಏಕರೂಪವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜ ಇರುವದು.

೧೬. △ ಅಬಡ ಮತ್ತು △ ಅಕಡ ಇವುಗಳ ಅಂತರ್ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು.

೧೭. $\frac{೧}{ರ_೧} + \frac{೧}{ರ_೨} + \frac{೧}{ರ_೩} = \frac{೧}{ರ}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೮. ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬ ಸಂಪಾತವು ಪದತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್-ಮಧ್ಯ ಇರುವದು.

೧೯. $ಯು_೧$, $ಯು_೨$, $ಯು_೩$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಲು, △ ಅಬಕ ರಚಿಸಿರಿ.

೨೦. ಯು, $ಯು_೨$, $ಯು_೩$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಲು, △ ಅಬಕ ರಚಿಸಿರಿ.

೨೧. ∠ ಅ, ಅಹ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಪರಿಮಿತಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಲು △ ಅಬಕ ರಚಿಸಿರಿ.

[∠ ಅ ದಷ್ಟು ∠ ಕ್ಷಅಯ ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅಕ್ಷ, $ಅಯ_೧$ ಗಳ ಮೇಲೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $ಅಫ_೧ = ಅಈ_೧ = \frac{೧}{೨}$ ಪರಿಮಿತಿ ಹೀಗೆ ಉದ್ದಳತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅಫ ದ ಮೇಲೆ $ಫ_೧$ ಮತ್ತು $ಈ_೧$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು $ಯು_೧$ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. $ಯು_೧$ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ $ಯು_೧ ಈ_೧$ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಅಹ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಇವೆರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ಸಾಧಾರಣ ತಿರ್ಯಕ್‌ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಅಕ್ಷ, ಅಯ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಬ ಮತ್ತು ಕ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. △ ಅಬಕ ಇದು ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.

ಮೊ. ಪುಸ್ತಕ ೨೮೭ ಪುಟದಲ್ಲಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ∠ ಡಅಈ ಇದು $೯೦^\circ + \frac{೧}{೨}$ ∠ ಅ ದಷ್ಟುಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ಅದರ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಬರುವದು.]

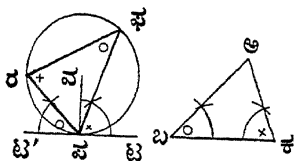
೨೨. ∠ ಅ, ರ ಮತ್ತು ಪರಿಮಿತಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಲು △ ಅಬಕ ರಚಿಸಿರಿ.

[ಉದಾ: ೨೧ರಂತೆ $ಯು_೧$ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ, $ಯು_೧ ಈ_೧$ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. $ಅಯು_೧$ ಕೂಡಿಸಿರಿ. $ಅಫ_೧$ ದ ಯಾವ ಬದಿಗೆ $ಅಯು_೧$

ಇರುವದೋ ಅದೇ ಬದಿಗೆ ಅಫ$_{೧}$ ವ ಮೇಲೆ ರ ದಷ್ಟು ಅಮ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮ ದಿಂದ ಅಫ$_{೧}$ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆದ ರೇಷೆಯು ಅಯ$_{೧}$ಕ್ಕೆ ಯ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಯ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ರ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಎರಡೂ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿರುವ ತಿರ್ಯಕ್‌ಸ್ಪರ್ಶರೇಷೆಯು ಅಫ$_{೧}$ಕ್ಕೆ ಬ ದಲ್ಲಿ, ಮತ್ತು ಅಕ$_{೧}$ಕ್ಕೆ ಕ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಅಂದರೆ △ ಅಬಕ ಇದು ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.]

ಕೃತ್ಯ ೨೩.

ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಕೋನವುಳ್ಳ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಬಕ** ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ; **ವ** ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— △ **ಅಬಕ** ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಕೋನವುಳ್ಳ ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ:— ಯಾವದೊಂದು **ವಪ** ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ವಪ** ದ ಮೇಲೆ **ಪ** ದಲ್ಲಿ **ಟ'ಪಟ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದ **ಬ** ಕೋನದಷ್ಟು **ರಪಟ'** ಕೋನ ಆಗುವಂತೆ **ಪರ** ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದ ∠ **ಕ** ದಷ್ಟು ∠ **ಫಪಟ** ಆಗುವಂತೆ **ಪಫ** ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಫರ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ **ಪಫರ** ಇದು ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ಟ'ಪಟ ⊥ ವಪ

∴ **ಟ'ಪಟ** ಇದು **ಪ** ದಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವದು.

∴ ∠ ಟ' ಪರ = ∠ ಪಫರ (ವ್ಯು. ವ. ಖಂಡಗಳ ಕೋನಗಳು)

ಪರಂತು, ∠ ಟಪರ = ∠ ಬ (ರಚನೆ)

∴ ∠ ಫ = ∠ ಬ ಅದರಂತೆ ∠ ರ = ∠ ಕ

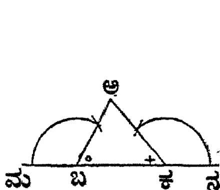
∴ ಉಳಿದ ∠ ಪ = ∠ ಅ

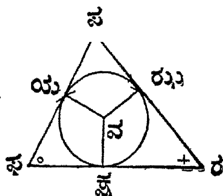
∴ Δ **ಫಪರ** ಇದು Δ **ಅಬಕ** ಇದರ ಸಮಕೋನ ಇದ್ದು, ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ ಅಂತರ್ಗತವಿದೆ. ಅಂದರೆ **ಪಫರ** ಇದು ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ವಾಯಿತು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ :— ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಕೃತ್ಯ ೨೪.

ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ ಸುತ್ತಲು ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಕೋನ ವುಳ್ಳ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.





ಪಕ್ಷ :— ಅಬಕ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. ವ ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ :— Δ **ಅಬಕ** ಕ್ಕೆ ಸಮಕೋನವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಬಹಿರ್ಗತವುಳ್ಳ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ :— **ಬಕ** ರೇಷೆಯನ್ನು **ಬ** ದ ಕಡೆಗೆ **ಮ** ದ ವರೆಗೆ, ಮತ್ತು **ಕ** ದ ಕಡೆಗೆ **ನ** ದ ವರೆಗೆ ಬೆಳೆಸಿರಿ. ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು **ವಕ್ಷ** ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆಯಿರಿ. ∠ **ಮಬಅ** ದಷ್ಟು ∠ **ಕ್ಷವಯ** ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು **ಕ್ಷವ** ಇದರ ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಗೆ ∠ **ನಕಅ** ದಷ್ಟು ∠ **ಕ್ಷವಝ**, ತೆಗೆಯಿರಿ; **ಯ** ಮತ್ತು **ಝ** ಬಿಂದುಗಳು ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಬರುವವು. **ವಕ್ಷ, ವಯ, ವಝ** ಗಳ ಮೇಲೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಕ್ಷ, ಯ, ಝ** ಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ಲಂಬರೇಷೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು **ಪ, ಫ, ರ** ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. (**ಕ್ಷ, ಯ, ಝ** ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಫರ, ಪಫ, ಪರ** ಗಳಲ್ಲಿರುವವು.) ಅಂದರೆ **ಪಫರ** ಇದು ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಫರ** ⊥ **ವಕ್ಷ** ∴ **ಫರ** ಇದು **ಕ್ಷ** ದಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು. ಅದರಂತೆ **ಪಫ** ಇದು **ರ** ದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು **ಪರ** ಇದು **ಝ** ದಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವವು.

ಪುನಃ **ಕ್ಷವಯಫ** ಚೌಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು = ೪ ಕಾಟಕೋನ, ಅದರಲ್ಲಿ ∠ **ಕ್ಷ** = ∠ **ಯ** = ೧ ಕಾಟಕೋನ.

∴ ∠ **ಕ್ಷವಯ** + ∠ **ಫ** = ೨ ಕಾಟಕೋನ.

ಪರಂತು ∠ **ಕ್ಷವಯ** = ∠ **ಮಬಅ** (ರಚನೆ)

∴ ∠ **ಫ** = ∠ **ಕ್ಷವಯ** ಇದರ ಪೂರಕ ಕೋನ

= ∠ **ಮಬಅ** ,, ,, ,,

= ∠ **ಅಬಕ**

ಅದರಂತೆ ∠ **ರ** = ∠ **ಅಕಬ.**

∴ ಉಳಿದ ∠ **ಪ** = ∠ **ಬಅಕ.**

∴ △ **ಪಫರ** ಇದು △ **ಅಬಕ** ಇದರ ಸಮಕೋನವಿದೆ; ಮತ್ತು ಅದರ ಭುಜಗಳು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು.

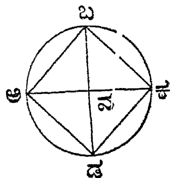
∴ △ **ಪಫರ** ಇದು ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ :—ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ ಸುತ್ತಲು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ಕೃತ್ಯ ೨೫.

ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚೌರಸ ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ:— ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು **ಅಕ** ವ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಕ**ದ ಮೇಲೆ **ಬಡ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಬ, ಬಕ, ಕಡ, ಡಅ** ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ **ಅಬಕಡ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಚೌರಸ ಆಗುವದು.



ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಡಅಬ, ಅಬಕ, ಬಕಡ** ಮತ್ತು **ಕಡಅ** ಇವೆಲ್ಲ ಕೋನಗಳು ಅರ್ಧವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿರುವದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾಟಕೋನ ಇದೆ.

∴ ∠**ಡಅಬ** + ∠**ಅಬಕ** = ೨ ಕಾಟಕೋನ

∴ **ಅಡ** ∥ **ಬಕ** ಅದರಂತೆ **ಅಬ** ∥ **ಡಕ**

∴ **ಅಬಕಡ** ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

ಪರಂತು, ∠**ಅ** = ೧ ಕಾಟಕೋನ; ಇರುವದರಿಂದ **ಅಬಕಡ** ಇದು ಆಯತವಿದೆ.

ಪುನಃ **ಅಬ, ಬಕ** ಇವು ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾಡುವವು.

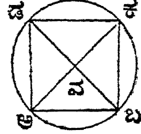
∴ **ಅಬ** = **ಬಕ**

∴ **ಅಬಕಡ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಚೌರಸವಿದೆ.

ಕೃತ್ಯ ೨೬.

ಕೊಟ್ಟ ಚೌರಸದ ಪರಿವೃತ್ತ ತೆಗೆಯುವದು.

ಪಕ್ಷ :— **ಅಬಕಡ** ಚೌರಸವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.



ಸಾಧ್ಯ:— **ಅ, ಬ, ಕ, ಡ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ:— **ಅಕ, ಬಡ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು **ವ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. (**ವ, ವಅ**) ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ಅ, ಬ, ಕ, ಡ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ :— ಚೌರಸದ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದು, ಒಂದನ್ನೊಂದು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವವು.

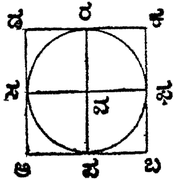
∴ **ವಅ = ವಬ = ವಕ = ವಡ.**

∴ (**ವ, ವಅ**) ವರ್ತುಳವು **ಅ, ಬ, ಕ, ಡ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳ ಇರುವದು.

ಕೃತ್ಯ ೨೭.

ಕೊಟ್ಟ ಚೌರಸದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ಪಕ್ಷ:— **ಅಬಕಡ** ಚೌರಸವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.



ಸಾಧ್ಯ :— ಈ ಚೌರಸದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ :— **ಅಬ** ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅದು **ಅಬ** ಕ್ಕೆ **ಪ** ದಲ್ಲಿ, ಮತ್ತು **ಕಡ** ಕ್ಕೆ **ರ** ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. **ಬಕ** ದ

ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅದು **ಅಡ**ಕ್ಕೆ **ಸ**ದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು **ಬಕ**ಕ್ಕೆ **ಫ**ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. **ಪರ, ಫಸ,** ಇವು **ವ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. (**ವ, ವಪ**) ಇದು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳವಾಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಪ, ಬ, ಫ** ಇವು ಕಾಟಕೋನಗಳಿವೆ; ಆದ್ದರಿಂದ **ಪಬಫವ** ಚೌಕೋನದ **ವ** ಕೋನವೂ ಕಾಟಕೋನ ಇರುವದು.

ಪಬ = ½ **ಅಬ**, **ಬಫ** = ½ **ಬಕ**. ∴ **ಪಬ** = **ಬ ಫ**

∴ **ಪಬಫವ** ಇದು ಚೌರಸವಿದೆ. ∴ **ವಪ** = **ವ ಫ**

ಅದರಂತೆ **ವಫ** = **ವರ**; **ವರ** = **ವಸ.**

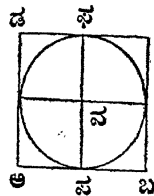
ಅಂದರೆ, **ವಪ** = **ವಫ** = **ವರ** = **ವಸ** ಮತ್ತು **ಪ, ಫ, ರ, ಸ** ಇವು ಕಾಟಕೋನಗಳು.

∴(**ವ, ವಪ**) ವರ್ತುಳವು **ಪ, ಫ, ರ, ಸ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು. ಮತ್ತು **ಅಬಕಡ** ಚೌರಸದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಈ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳವಿರುವದು.

ಕೃತ್ಯ ೨೮.

ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ ಸುತ್ತಲೂ ಚೌರಸ ತೆಗೆಯುುವದು.

ಪಕ್ಷ:— **ವ** ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.



ಸಾಧ್ಯ:— ಈ ವರ್ತುಳದ ಸುತ್ತಲೂ ಒಂದು ಚೌರಸವನ್ನು ತೆಗೆಯುುವದು.

ರಚನೆ:— ವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು **ಪಫ** ವ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು **ರಸ** ವ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಪ, ಫ, ರ, ಸ** ಗಳಿಂದ ವರ್ತುಳ ಸ್ಪರ್ಶ

ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಅ, ಬ, ಕ, ಡ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. **ಅಬಕಡ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಚೌರಸವು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ವಪಬಸ** ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ವ, ಪ, ಸ ಇವು ಕಾಟಕೋನಗಳಾಗಿವೆ; ಅದ್ದರಿಂದ ∠ ಬ ಇದೂ ಕಾಟಕೋನವು. ಇದರಂತೆ ಅ, ಕ, ಡ ಕೋನಗಳೂ ಕಾಟಕೋನಗಳಿರುವವು.

∴ **ಅಬಕಡ** ಆಯತ ಆಗುವದು.

ಪುನಃ **ಅಬ = ರಸ; ಬಕ = ಪಫ** ಮತ್ತು

ಪಫ = ರಸ (ವ್ಯಾಸ) : ಆದ್ದರಿಂದ **ಅಬ = ಬಕ.**

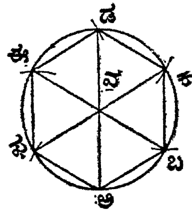
∴ **ಅಬಕಡ** ಚೌರಸವಿದೆ; ಮತ್ತು ಅದರ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು.

∴ **ಅಬಕಡ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಚೌರಸ ಇರುವದು.

ಕೃತ್ಯ ೨೯.

ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ ಅಂತರ್ಗತ ಸುಸಮ ಷಟ್‌ಕೋನ ತೆಗೆಯುವದು.

ಪಕ್ಷ:— ವ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.



ಸಾಧ್ಯ:— ಈ ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಒಂದು ಸುಸಮ ಷಟ್‌ಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ:— ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘದ ಮೇಲೆ ಯಾವದೊಂದು ಅ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟು ಅ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಅಬ, ಬಕ, ಕಡ, ಡಈ, ಈಫ** ಜ್ಯಾರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಫ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ **ಅಬಕಡಈಫ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಷಟ್‌ಕೋನ ಆಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ :— ರಚನೆಯಂತೆ **ವಅಬ** ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜವಿದೆ.

∴ ∠ **ಅವಬ** ೬೦°

ಇದರಂತೆ, **ಬವಕ, ಕವಡ, ಡವಈ, ಈವಫ** ಕೋನಗಳೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ೬೦° ಇರುವವು.

ವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು ೩೬೦° ಇರುವದು.

∴ ∠ **ಫವಅ** = ೩೬೦° – (೫ × ೬೦°) ೩೬೦° – ೩೦೦° = ೬೦°.

∴ **ಅಬ, ಅಫ** ಇವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾಡುವವು.

∴ **ಅಫ** = **ಅಬ** = ತ್ರಿಜ್ಯ.

∴ △ **ಫವಅ** ಇದು ಸಮಭುಜವಿದೆ.

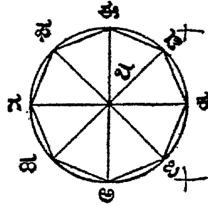
ಅಂದರೆ, **ಅಬಕಡಈಫ** ಷಟ್‌ಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು; ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು (ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನ = ೧೨೦°)

∴ **ಅಬಕಡಈಫ** ಇದು ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಇಷ್ಟ ಸುಸಮ ಷಟ್-ಕೋನ ಇರುವದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ:—ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ ಸುತ್ತಲೂ ಸುಸಮ ಷಟ್‌ಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅ, ಬ, ಕ, ಡ, ಈ, ಫ ಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಕೃತ್ಯ ೩೦.

ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ ಅಂತರ್ಗತ ಸುಸಮ ಅಷ್ಟಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಪಕ್ಷ :— ವ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— ಈ ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಸುಸಮ ಅಷ್ಟಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ:— **ಅವಈ** ಯಾವದೊಂದು ವ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗುವಂತೆ **ಗವಕ** ಇನ್ನೊಂದು ವ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಈ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವ ಇನ್ನೆರಡು **ಡವಹ, ಬವಫ** ವ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಅಬ, ಬಕ, ... ಹಅ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ **ಅಬಕಡಈಫಗಹ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಅಷ್ಟಕೋನ ಆಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ರಚನೆಯಿಂದ **ಅವಬ, ಬವಕ .... ಹವಅ** ಇವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ೪೫° ದ ಕೋನಗಳಿರುವವು.

∴ ಅಷ್ಟಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು. **ವಅಬ** ಸಮ ದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ಇರುವದರಿಂದ ಅದರ ತಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವು ½ (೧೮೦°–೪೫°) = ೬೭½° ಇರುವದು. ಆದರಂತೆ **ಬವಕ, ಕವಡ** ಮೊದಲಾದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ತಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ೬೭½° ಇರುವವು. ಅಂದರೆ ಅಷ್ಟಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವು ೧೩೫° ಆಗುವದು. ಇದರಿಂದ ಅಷ್ಟಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಕೋನ ಇವು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಇಷ್ಟ ಅಷ್ಟಕೋನ ಇರುವದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ :—ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ ಸುತ್ತಲು ಅಷ್ಟಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಅ, ಬ, ಕ, ಡ,....ಹ ಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ನೀವು ಸಿದ್ಧಮಾಡಬಹುದು:—

೧. ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದಷ್ಟು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ, ವಿಭಾಗದರ್ಶಕ ಬಿಂದುಗಳು ಸುಸಮ ಬಹು-ಭುಜದ ಕೋನಬಿಂದುಗಳಾಗುವವು.

೨. ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದಷ್ಟು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದರ್ಶಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಬಹು-ಭುಜವು ಸುಸಮ ಇರುವದು.

೩. ಸುಸಮ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಎಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವವು. ಈ ಬಿಂದುವು ಆ ಬಹುಭುಜದ ಅಂತರ್ಗತ ಮತ್ತು ಪರಿಗತ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವದು.

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಎಲ್ಲ ಕೃತ್ಯಗಳನ್ನು ಇಂಚುಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಕಂಪಾಸ ಇವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನ ಮಾಪಕದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಲ್ಲ.

ಕೋನ ಮಾಪಕದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪಂಚಕೋನ, ದಶಕೋನ, ದ್ವಾದಶ ಕೋನ ಮೊದಲಾದ ಎಷ್ಟೋ ಸುಸಮ ಬಹುಕೋನಗಳನ್ನು ವರ್ತುಳದ ಅಂತರ್ಗತ ಇಲ್ಲವೆ ಪರಿಗತಗಳಾಗಿ ತೆಗೆಯಬಹುದು.

ಕೇವಲ ಇಂಚುಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಕಂಪಾಸ ಇವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸುಸಮ ಪಂಚಕೋನ, ದಶಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು; ಪರಂತು ಇವುಗಳ ರಚನೆಯು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಠಿಣವಾಗಿರುವದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿಲ್ಲ.

---

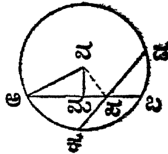
೨೯ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ಜ್ಯಾ ಖಂಡಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಆಯತ

["ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನ"ಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಈ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಬಹುದು; ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಮುಂದೆ ೭೪ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ನಂತರ ಅನುಸರಿಸಿದೆ.]

ಪ್ರಮೇಯ ೭೪.

ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ಖಂಡಗಳಿಂದಾದ ಆಯತವು, ಇನ್ನೊಂದರ ಖಂಡಗಳಿಂದಾದ ಆಯತಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ **ಅಬ, ಕಡ** ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳದ ಒಳಗಿನ **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿರುವವು; **ವ** ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— ಅಪ · ಪಬ = ಕಪ · ಪಡ

ರಚನೆ:— ಅಬದ ಮೇಲೆ **ವಮ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. (ಕೆಳಗಿನ ಟಿಪ್ಪಣಿ ೪ ನೋಡಿರಿ.) **ವಅ, ವಪ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ವಮ ⊥ ಅಬ ∴ ಮ ಇದು ಅಬದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವು.

∴ ಅಪ · ಪಬ = (ಅಮ + ಮಪ) (ಮಬ − ಮಪ)

= (ಅಮ + ಮಪ) (ಅಮ − ಮಪ)

(∵ ಅಮ = ಮಬ)

= ಅಮ^{೨} − ಮಪ^{೨} ....(೧)

ಪುನಃ $ವಅ^2 - ವಪ^2 = (ವಮ^2 + ಅಮ^2) - (ವಮ^2 + ಮಪ^2)$

$= ಅಮ^2 - ಮಪ^2$ ....(೨)

ಆದ್ದರಿಂದ (೧) ಮತ್ತು (೨) ಗಳ ಮೇಲಿಂದ

$ಅಪ . ಪಬ = ವಅ^2 - ವಪ^2$ ....(೩)

ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ವ ದಿಂದ ಕಡ ದ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ತೆಗೆದು

$ಕಪ . ಪಡ = ವಡ^2 - ವಪ^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$= ವಅ^2 - ವಪ^2$ ($\because$ ವಅ = ವಡ)

$\therefore$ ಅಪ . ಪಬ = ಕಪ . ಪಡ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ ೧:—ಮೇಲೆ (೧) ರಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದಂತೆ:—ಅಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮ ದಿಂದ ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನೂ, ಪ ದಿಂದ ಎರಡು ಅಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನೂ ಮಾಡಿದ್ದರೆ, $ಅಪ . ಪಬ = ಅಮ^2 - ಮಪ^2$ ಅಥವಾ $ಅಪ . ಪಬ + ಮಪ^2 = ಅಮ^2$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುವದು. ಅದನ್ನು ಶಬ್ದರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸಬಹುದು :—

"ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಎರಡು ಸಮಾನ ಮತ್ತು ಎರಡು ಅಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದರೆ, ಅಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಿಂದುಂಟಾದ ಆಯತ ಮತ್ತು ಭೇದ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸ ಇವೆರಡರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಬೇರೀಜು ಮೂಲ ರೇಖೆಯ ಅರ್ಧಭಾಗದ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದಷ್ಟು ಇರುವದು. [ಯುಕ್ಲೀಡ ೨; ೫]

ಟಿಪ್ಪಣಿ ೨:—ಮೇಲೆ (೩) ರಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು. (ವ, ರ) ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ಇದ್ದು, ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೊರಟ ಯಾವದೊಂದು ಅಬ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $ಅಪ . ಪಬ = ರ^2 - ವಪ^2$ ಆಗುವದು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ ೩:—ಮೇಲಿನ (೩) ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

"ವಅಬ ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಬ ತಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $ಅಪ . ಪಬ = ವಅ^2 - ವಪ^2$." (ಪಾಪುಸನ ಪ್ರಮೇಯ)

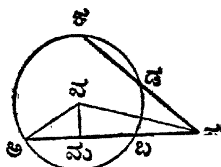
ಟಿಪ್ಪಣೆ ೪:—ಮೇಲಿನ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿ 'ಯಾವ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯೂ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ ದಲ್ಲಿಂದ ಹಾದು ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ' ಎಂದು ಗೃಹೀತ ಹಿಡಿದಿದೆ. ನಿಜವಾಗಿ ಈ ಪ್ರಕಾರ ವನ್ನೂ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಭಾವವಾಗಬೇಕಿತ್ತು. 'ಕಡ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯು ವ ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು; ಮತ್ತು ವ ಬಿಂದುವು ಕ ಮತ್ತು ಪ ದ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬೀಳು ವದು' ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ಅಂದರೆ, ಕಪ.ಪಡ = (ಕವ + ವಪ) (ವಡ − ವಪ)
= (ಕವ + ವಪ) (ಕವ − ವಪ) (∴ ಕವ = ವಡ = ತ್ರಿಜ್ಯ)
= ಕವ೨ − ವಪ೨ = ವಅ೨ − ವಪ೨. (∴ ವಅ = ಕವ = ತ್ರಿಜ್ಯ)

ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇನ್ನುಳಿದವುಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ ೩೫.

ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ಬೆಳಿಸಿದರೆ, ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗೆ ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ಖಂಡಗಳಿಂದುಂಟಾದ ಆಯತವು, ಇನ್ನೊಂದರ ಖಂಡಗಳಿಂದುಂಟಾದ ಆಯತಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ವ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಅಬ, ಕಡ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳನ್ನು ಬೆಳಿಸಿ ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗೆ **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— **ಪಅ . ಪಬ = ಪಕ . ಪಡ**

ರಚನೆ:— ಅಬ ದ ಮೇಲೆ ವಮ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ವಅ, ವಪ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. (ಟಿಪ್ಪಣೆ ೩ ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.)

ಸಿದ್ಧತೆ:— ∵ ವಮ ⊥ ಅಬ ∴ ಮಅ = ಮಬ.

ಪಅ . ಪಬ = (ಪಮ + ಮಅ) (ಪಮ − ಮಬ)
= (ಪಮ + ಮಅ) (ಪಮ − ಮಅ)
= ಪಮ^2 − ಮಅ^2........................(೧)

ಪರಂತು ವಪ^2 − ವಅ^2 = (ವಮ^2 + ಪಮ^2) − (ವಮ^2 + ಮಅ^2)
= ಪಮ^2 − ಮಅ^2........................(೨)

∴ (೧) ಮತ್ತು (೨) ಗಳ ಮೇಲಿಂದ
ಪಅ . ಪಬ = ವಪ^2 − ವಅ^2............................(೩)

ಅದರಂತೆ ಪಕ . ಪಡ = ವಪ^2 − ವಕ^2
= ವಪ^2 − ವಅ^2

∴ ಪಅ . ಪಬ = ಪಕ . ಪಡ.

ಉಪ ಸಿದ್ಧಾಂತ ೧:— ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಅಬ, ಕಡ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ ಪ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಮತ್ತು ಪ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪಟ ವರ್ತುಳ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಪಟ^2 = ಪಅ . ಪಬ = ಪಕ . ಪಡ ಆಗುವದು.

ಯಾಕಂದರೆ, ಪಟ^2 = ವಪ^2 − ವಟ^2 = ವಪ^2 − (ತ್ರಿಜ್ಯ)^2.

ಉಪ ಸಿದ್ಧಾಂತ ೨:— ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅವು ಸಮಾನ ಇರುವವು.

[ಹಿಂದೆ ಪ್ರಮೇಯ ೬೦ (೧) ನೋಡಿರಿ.]

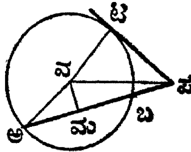
ಟಿಪ್ಪಣಿ ೧:—(೧) ಇದರ ಸಮೀಕರಣ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:—
ಪಅ.ಪಬ + ಮಅ^2 = ಮಪ^2. (ಯುಕ್ಲೀಡ ೨. ೬.) ಇದರ ಶಾಬ್ದಿಕ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ನೀವು ತಯಾರಿಸಿರಿ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ ೨:—(೨) ರಿಂದ ಕಂಡು ಬರುವ ಸಂಗತಿ:— (ವ, ರ) ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗೆ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಆದರಿಂದ ಯಾವದೊಂದು ಅಬ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಪಅ.ಪಬ = ವಪ^2 − ರ^2 ಆಗುವದು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ ೩:—ಅಬ, ಕಡ ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯು ವ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋದರೂ ಕೂಡ ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಮಾಡಲಿಕ್ಕೆ ಬರುವದು. ಉದಾಹರಣಾರ್ಥವಾಗಿ, ಕಡ ಇದು ವ ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಪಕ.ಪಡ = ವಪ^2 − ರ^2 ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ ೬೬.

ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಛೇದಕ ರೇಖೆಯನ್ನೂ, ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನೂ ತೆಗೆದರೆ, ಛೇದಕ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿದ್ದ ಭಾಗ ಇವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಆಯತವು, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ವ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗೆ ಪ ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ **ಪಬಅ** ಛೇದಕ ರೇಖೆಯನ್ನೂ, **ಪಟ** ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನೂ ತೆಗೆದಿರುವವು.

ಸಾಧ್ಯ:— ಪಅ . ಪಬ = ಪಟ^2

ರಚನೆ:— ಅಬ ದ ಮೇಲೆ ವಮ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. ವಅ, ವಪ, ವಟ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ∴ ವಮ ⊥ ಅಬ ∴ ಅಮ = ಮಬ.

ಪಅ . ಪಬ = (ಪಮ + ಮಅ) (ಪಮ − ಮಬ)

= (ಪಮ + ಮಅ) (ಪಮ − ಮಅ)

= ಪಮ^2 − ಮಅ^2

ಪರಂತು, ವಪ^2 − ವಅ^2 = (ವಮ^2 + ಪಮ^2) − (ವಮ^2 + ಮಅ^2)

= ಪಮ^2 − ಮಅ^2.

∴ ಪಅ . ಪಬ = ವಪ^2 − ವಅ^2.

ಪುನಃ **ವಟ** ತ್ರಿಜ್ಯ ಇದು **ಪಟ** ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ **ಟ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬವಿದೆ.

∴ ಪಟಿ^{2} = ವಪ^2 - ವಟಿ^{2} (ಪಾಯಥಾಗೋರಸ)
= ವಪ^2 - ವಅ^2 (ವಅ = ವಟಿ = ತ್ರಿಜ್ಯ)
∴ ಪಅ . ಪಬ = ಪಟಿ^{2}.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ:— ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ **ಪಅಬ**, **ಪಕಡ** ಎರಡು ಛೇದಕ ರೇಖೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅ, ಬ ಮತ್ತು ಕ, ಡ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ, **ಪಅ· ಪಬ = ಪಕ.ಪಡ.** ಯಾಕಂದರೆ **ಪಟಿ** ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯನ್ನು **ಪ** ದಿಂದ ತೆಗೆದಿದ್ದರೆ **ಪಅ . ಪಬ** ಮತ್ತು **ಪಕ . ಪಡ** ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು **ಪಟಿ**^{2}ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿವೆ.

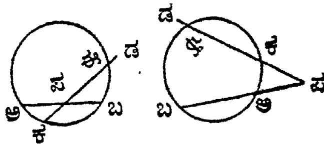
ಟಿಪ್ಪಣಿ ೧:—ಪ್ರಮೇಯ ೬೫ ಮತ್ತು ೬೬ ಇವುಗಳನ್ನು ಬೇಕೆಂದು ಸ್ವತಂತ್ರ ಕೊಟ್ಟಿರುವೆವು. ಅವುಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿ ಪುನರುಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಪರಂತು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಲು, ಅದನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ರೀತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಿದ್ಧವೆಂದು ಹಿಡಿದು ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತವೆಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡುವದು ಪರೀಕ್ಷೆಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಒಳಿತಲ್ಲ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ ೨:—ಇದೇ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಮುಂದೆ ಪ್ರಮೇಯ ೭೮ ರ ನಂತರ ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ ೩:—ಅಬ ರೇಖೆಯು ವ ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ, ವಮ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಲಿಕ್ಕೆ ಬರಲಾರದು. ಆದರೂ ಪಅ.ಪಬ = ಪವ^2 – (ತ್ರಿಜ್ಯ)^2 ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ ೬೭ (೬೪, ೬೫ ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)

ಎರಡು ಮರ್ಯಾದಿತ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಅಥವಾ ಅವುಗಳನ್ನು ಬೆಳಿಸಿದರೆ ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಒಂದರ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಿಂದ ಆಗುವ ಆಯತವು, ಇನ್ನೊಂದರ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಿಂದ ಆಗುವ ಆಯತಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ, ಆ ರೇಖೆಗಳ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದ ಮೇಲಿರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಬ, ಕಡ** ಮರ್ಯಾದಿತ ರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದ್ದಾಗ ಬೆಳೆಸಿದರೆ ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು; ಮತ್ತು **ಪಅ . ಪಬ = ಪಕ . ಪಡ.**

ಸಾಧ್ಯ:— **ಅ, ಬ, ಕ, ಡ** ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿರುವವು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಅ, ಬ, ಕ** ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿರದಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು (ಪ್ರ. ೪೭).

ಈ ವರ್ತುಳವು **ಡ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗದಿದ್ದರೆ,

(೧) **ಕಡ** ಇಲ್ಲವೆ ಬೆಳಿಸಿದ **ಕಡ**ಕ್ಕೆ ವರ್ತುಳವು **ಈ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಬಹುದು; ಇಲ್ಲವೆ,

(೨) **ಕಡ** ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ **ಕ**ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡಬಹುದು. (**ಪ** ಬಿಂದುವು **ಅಬಕ** ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗೆ ಇದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಈ ಎರಡನೆಯ

ಪರ್ಯಾಯವು ಸಂಭವಿಸುವದು. ಈ ಪರ್ಯಾಯದ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನೀವು ತೆಗೆಯತಕ್ಕದ್ದು).

ಪರ್ಯಾಯ (೧) ರಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ **ಅಬ, ಕಈ** ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು **ಪ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ,

ಪಅ . ಪಬ = ಪಕ . ಪಈ

ಪರಂತು **ಪಅ . ಪಬ = ಪಕ . ಪಡ** (ಪಕ್ಷ)

∴ **ಪಕ . ಪಡ = ಪಕ . ಪಈ**

∴ **ಪಡ = ಪಈ**

ಮತ್ತು **ಡ, ಈ** ಬಿಂದುಗಳು **ಪ** ದ ಒಂದೇ ಬದಿಗೆ ಇರುವವು.

∴ **ಈ** ಬಿಂದುವು **ಡ** ದಲ್ಲಿ ಏಕರೂಪ ಇರುವದು.

ಪರ್ಯಾಯ (೨) ರಲ್ಲಿ **ಪಕ** ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯಿರುವದರಿಂದ,

ಪಕ^{೨} = **ಪಅ**^{೨} − **ಪಬ**^{೨}

ಪರಂತು **ಪಕ . ಪಡ = ಪಅ . ಪಬ** (ಪಕ್ಷ)

∴ **ಪಕ**^{೨} = **ಪಕ . ಪಡ**

∴ **ಪಕ = ಪಡ.**

ಪರಂತು, **ಕ** ಮತ್ತು **ಡ** ಬಿಂದುಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಇರುವದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಶಕ್ಯವಿಲ್ಲ.

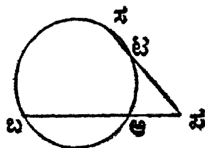
∴ **ಪಕ** ರೇಖೆಯು **ಅಬಕ** ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ **ಕ** ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದಿಲ್ಲ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಪರ್ಯಾಯ (೨) ಅಶಕ್ಯವಿದೆ. ಮತ್ತು ಪರ್ಯಾಯ (೧) ರಲ್ಲಿ **ಅಬಕ** ವರ್ತುಳವು **ಡ** ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದೆಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿದೆ.

∴ **ಅ, ಬ, ಕ, ಡ** ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿವೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ :— ಎಷ್ಟೋ ಲೇಖಕರು ಪರ್ಯಾಯ (೨) ನ್ನು ವಿಚಾರಿಸುವದಿಲ್ಲ; ಆದರೆ ಅದನ್ನು ವಿಚಾರಿಸುವದು ಅಗತ್ಯವಿದೆ; ಇದರ ಹೊರತು ಸಿದ್ಧತೆಯು ಪೂರ್ಣ ಆಗಲಾರದೆಂದು ನಮ್ಮ ಮತವಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ ೬೮ (ಪ್ರ. ೬೬ ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)

ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ ಯಾವದೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಛೇದಕ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಕೂಡುವ ರೇಖೆ ಇವುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಆ ಪೂರ್ಣ ಛೇದಕ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ ಭಾಗ ಇವುಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಆಯತವು, ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡನೆಯ ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಇರುವದು.



ಪಕ್ಷ:— ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಛೇದಕ ರೇಖೆ ಕೊಟ್ಟದೆ. ಹಾಗೂ **ಟ** ದಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಕೂಡುವ ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟದೆ. ಮತ್ತು **ಪಅ . ಪಬ = ಪಟ**^{2}.

ಸಾಧ್ಯ:— **ಪಟ** ರೇಖೆಯು **ಟ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ಪಟ** ರೇಖೆಯು **ಟ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡದಿದ್ದರೆ, ಅದು ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡಬಹುದು. ಅದು **ಸ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ಅಂದರೆ **ಅಬ, ಸಟ** ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿದರೆ, ಅವು **ಪ** ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು.

∴ **ಪಅ . ಪಬ = ಪಟ . ಪಸ**

ಪರಂತು **ಪಅ . ಪಬ = ಪಟ**೨ (ಪಕ್ಷ)

∴ **ಪಟ . ಪಸ = ಪಟ**೨

∴ **ಪಸ = ಪಟ**

∴ **ಸ** ಬಿಂದುವು **ಟ** ದಲ್ಲಿ ಏಕರೂಪ ಆಗುವದು.

ಆದ್ದರಿಂದ **ಪಟ** ರೇಷೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ಬೆಳಿಸಿದಾಗ್ಯೂ ಅದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ **ಟ** ಇದೊಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು.

∴ **ಪಟ** ರೇಷೆಯು **ಟ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.

ಟಿಪ್ಪಣೆ:—ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಬಹಳ ಉಪಯೋಗ ಆಗುವದು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೩.

೧. △ಅಬಕ ದ ∠ಕ ಇದು ಕಾಟಕೋನವಿದೆ. ಕಡ ⊥ ಅಬ ಆದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

(೧) ಅಡ.ಡಬ = ಕಡ೨ (೨) ಅಡ.ಅಬ = ಅಕ೨ (೩) ಬಡ.ಬಅ = ಬಕ೨

೨. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವವು. ಅವುಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಪ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದೊಂದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಒಂದೊಂದು ಹೀಗೆ ಅಬ, ಕಡ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅಪ.ಪಬ = ಕಪ.ಪಡ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿಯ (ಬೆಳಿಸಿದಾಗ) ಯಾವದೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಷೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅವು ಸಮಾನ ಇರುವವು.

೪. ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶರೇಷೆಗಳು ಆ ವರ್ತುಳಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯಿಂದ ದ್ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವವು.

೫. ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವಂಥ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಮೂರನೆಯದೊಂದು ವರ್ತುಳವು ಅ, ಬ ಮತ್ತು ಕ, ಡ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಅಬ, ಕಡ ಗಳನ್ನು ಬೆಳಿಸಿದರೆ ಅವು ಮ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು. ಆದರೆ ಮ ದಿಂದ ಆ ಮೂರೂ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ತೆಗೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಷೆಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೬. $\triangle$ಅಬಕ ದ ಅ, ಬ, ಕ ಕೋನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಅಡ, ಬಈ, ಕಫ ಲಂಬಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಪ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು. ಆದರೆ, ಅಪ.ಪಡ = ಬಪ.ಪಈ = ಕಪ.ಪಫ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೭. ಅ ಇದೊಂದು ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಇದೆ. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಪಅ ವ್ಯಾಸವು, ಎರಡನೆಯ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಫ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ವರ್ತುಳದ ರಅ ವ್ಯಾಸವು ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಸ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ, ಪಅ.ಅಫ = ರಅ.ಅಸ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೮. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಅಬ ಮತ್ತು ಕಡ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ ಮತ್ತು ಫ ಬಿಂದುಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಮಪ = ಮಫ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡಿವೆ. ಆದರೆ, ಅಪ.ಪಬ = ಕಫ.ಫಡ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೯. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಅನೇಕ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಬೆಳಿಸಿದ ಬಅ ದಲ್ಲಿ ಪ ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿದೆ. ಪ ದಿಂದ ಆಯಾ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ತೆಗೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೦. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅದರ ಹೊರಗಿನ ಅ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಪ, ಅಫ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಮ ರೇಖೆಯು ಪಫ ರೇಖೆಯನ್ನು ನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಯನ.ಮಅ = ಮಪ^2, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೧. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ ವ್ಯಾಸವಿದೆ. ಪಫ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯು ಅಬ ದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ; ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಪ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಬೆಳಿಸಿದ ಅಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ಮ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಮಅ.ಮಬ – ನಅ.ನಬ = ಮನ^2 ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೨. ಅಬ ಇದು ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಒಂದು ನಿಯತ ವ್ಯಾಸವಿದೆ. ಮತ್ತು ಅಬ ಇಲ್ಲವೆ ಬೆಳಿಸಿದ ಅಬ ದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಕ್ಷಯ ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಯಿದೆ. ಅ ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಯಾವದೊಂದು ರೇಖೆಯು ಕ್ಷಯ ಕ್ಕೆ ಪ ದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಫ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ, ಅಪ.ಅಫ = ನಿಯತ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೩. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ ಮತ್ತು ಕಡ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಇವೆ. ಈ ವರ್ತುಳಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದಿರುವ ಸಮಕೇಂದ್ರ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಮೇಲಿನ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆ

ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ, ಪ′ ಮತ್ತು ಫ, ಫ′ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ತ ಮತ್ತು ರ ಇವು ಆ ವರ್ತುಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಪ.ಪಬ = ಕಫ.ಫಡ = ತ^{೨} – ರ^{೨} ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೪. ಪೃಥ್ವಿಯ ಪೃಷ್ಠ ಭಾಗದಿಂದ (ಉ) ಎಂಬ ಎತ್ತರದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದೃಶ್ಯ ಕ್ಷಿತಿಜದ (ಅ) ಎಂಬ ಅಂತರವು, ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪೃಥ್ವಿಯ ಪೃಷ್ಠ ಭಾಗದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದಳತೆಯಷ್ಟು ಇದೆ. ತ ಇದು ಪೃಥ್ವಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವಿದ್ದರೆ ಅ^{೨} = ಉ (೨ತ + ಉ) ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ತ ಇದಕ್ಕೆ ತುಲನೆ ಮಾಡುವಾಗ ಉ ಸಣ್ಣದಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಸನ್ನಮಾನದಿಂದ ಅ^{೨} = ೨ತಉ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

೧೫. ಹಿಮಾಲಯದ ಗೌರೀಶಂಕರ ಶಿಖರವು ೨೯,೦೦೦ ಫೂಟು ಎತ್ತರವಿದೆ. ಪೃಥ್ವಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು ೩,೯೬೦ ಮೈಲು ಹಿಡಿದು, ಗೌರೀಶಂಕರ ಶಿಖರದಿಂದ ದೃಶ್ಯ ಕ್ಷಿತಿಜದ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

(ದೃಷ್ಟಿಗೆ ನಡುವೆ ಅಡ್ಡ ಬರುವ ಆತಂಕಗಳಿಲ್ಲವೆಂದು ಗೃಹೀತ ಹಿಡಿಯಿರಿ.)

೧೬. ಪೃಥ್ವಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ೩,೯೬೦ ಮೈಲು ಇದೆ, ಎಂದು ತಿಳಿದು ಉ ಫೂಟು ಎಂಬ ಎತ್ತರದಿಂದ ದೃಶ್ಯ ಕ್ಷಿತಿಜದ ಅಂತರವು ಆಸನ್ನ ಮಾನದಿಂದ $\sqrt{(೩ಉ/೨)}$ ಮೈಲು ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೭. ರ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ನಳದಿಂದ ನೀರು ಹರಿಯುತ್ತಿರುವದು. ನೀರಿನ ಪೃಷ್ಠ ಭಾಗದ ಅಗಲಳತೆಯು ೨ಬ ಇದೆ. ಮತ್ತು ನೀರಿನ ಮಧ್ಯ ಭಾಗದ ತಗ್ಗು ಹ ಇದೆ. ಆದರೆ, ಹ^{೨} – ೨ರಹ + ಬ^{೨} = ೦ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೮. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಅಬ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಪ ಇದೊಂದು ಬಿಂದು ಇದೆ. ಪ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಪ^{೨} = ಅಪ.ಪಬ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೯. ಕೊಟ್ಟ ಅಬಕಡ ಆಯತಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ, ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜ ಕೊಟ್ಟ ಪಫ ರೇಖೆಗೆ ಸರಿಯಾಗುವಂಥ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

*೨೦. ಕೊಟ್ಟ ಒಂದು ಚೌರಸಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವುಳ್ಳ, ಮತ್ತು ಭುಜಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಯಷ್ಟು ಇರುವ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

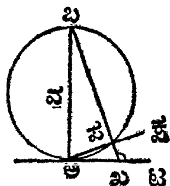
ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಯು 'ಜ್ಯಾ ರೇಷೆ' ಅಥವಾ 'ಭೇದನ ರೇಷೆ' ಇವುಗಳ ಅಂತಿಮ ಸ್ಥಿತಿ (Limiting position) ಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ರೇಷೆಯಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಅ ಇದೊಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ; ಮತ್ತು ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪುನಃ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವ **ಕ್ಷ**'**ಅಕ್ಷ** ಭೇದನ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಇನ್ನು ಅ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿಟ್ಟು ಈ ಭೇದಿಕೆಯನ್ನು ತಿರುಗಿಸುತ್ತ **ಪ** ಬಿಂದುವು ಅ ಬಿಂದುವಿನ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ಬರುವಂತೆ ಮಾಡಿರಿ. **ಟ**'**ಅಟ** ರೇಷೆಯು ಅ ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತರ **ಪ** ಬಿಂದುವು ಸರಿಯುತ್ತ ಸರಿಯುತ್ತ ಸಮೀಪ (ಬಲಕ್ಕೆ ಅಥವಾ ಎಡಕ್ಕೆ) ಬಂದಂತೆ **ಕ್ಷಅಕ್ಷ**' ಮತ್ತು **ಟಅಟ**' ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಕೊಟ್ಟ ಸಣ್ಣ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ (ಅದು ಎಷ್ಟೇ ಸಣ್ಣದಿದ್ದರೂ) ಸಣ್ಣದಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು. ಇಂಥ **ಟಅಟ**' ರೇಷೆಗೆ ವರ್ತುಳದ **ಅ** ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ **ಸ್ಪರ್ಶರೇಷೆ** ಅನ್ನುವರು. ಹೀಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ, ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ **ಅ** ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಯು **ಅಪ** ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯು ಅಥವಾ **ಅಕ್ಷ** ಭೇದಕ ರೇಷೆಯ **ಪ** ಮತ್ತು **ಅ** ದ ಕಡೆಗೆ ಅಭಿಗಮನ ಮಾಡುವಾಗ ಆಗುವ **ಅಂತಿಮ ಸ್ಥಿತಿದರ್ಶಕ ರೇಷೆ** (The tangent is the Limiting position of this chord or secant) ಅನ್ನುವರು.

ಟಿಪ್ಪಣೆ:— "ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಎರಡು ಏಕರೂಪ (Coincident) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡುವ ರೇಷೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆ ಅನ್ನುವರು" ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯು ಕೆಲವೆಡೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದರೆ ಇದು ಸದೋಷವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಾರದು.

"ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಯು, ತನ್ನ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೊರಡುವ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವದು".

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು:—



ವ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿರುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ **ಅ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ **ಅಟ** ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಅ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ **ಅಬ** ವ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ **ಪ** ಎಂಬ ದೊಂದು ಚಲಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಬಪ** ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಮತ್ತು ಅದನ್ನು, **ಅಟ** ರೇಷೆಗೆ **ಖ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವಂತೆ ಬೆಳೆಸಿರಿ.

ಅಂದರೆ, ∠ **ಅಪಬ** = ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ;

∴ ∠ **ಅಪಖ** = ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ;

∴ ∠ **ಪಖಟ** = ∠ **ಪಅಟ** + ∠ **ಅಪಖ**

= ∠ **ಪಅಟ** + ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ;

ಅಂದರೆ, ∠ **ಬಖಟ** = ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ + ∠ **ಪಅಟ.**

ಪ ಬಿಂದುವು **ಅ** ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬಂದ ಬಂದ ಹಾಗೆ [∠ **ಬಖಟ** - ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ] ಈ ಅಂತರವು (ಮೊದಲು ∠ **ಪಅಟ** ದಷ್ಟು ಇದ್ದದ್ದು) ಕಡಿಮೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಕೊನೆಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಯಾವದೊಂದು ಅತಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಸೂಕ್ಷ್ಮತರ ಆಗುವದು; ಮತ್ತು ಸೂಕ್ಷ್ಮತರ ವಾಗಿಯೇ ಉಳಿಯುವದು. ಅಂದರೆ, ∠ **ಬಖಟ** ಇದರ **ಅಂತಿಮಮಾನ** (Limit) ವು ಒಂದು ಕಾಟಕೋನವಾಗಿಯೇ ಉಳಿಯುವದು; ಅಂದರೆ ∠ **ಬಅಟ** ಇದು ಒಂದು ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ ೫೨ರ ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತದ ಅಂತಿಮ ಪರಿಣತಿಯೆಂದರೆ, ೬೨ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯ. ಮತ್ತು ೬೫ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಅಂತಿಮ ಪರಿಣತಿಯೆಂದರೆ, ೬೬ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಈಗ ನೀವು ತಿಳಕೊಂಡಿರಬಹುದು.

ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

ವರ್ತುಳವು (ಸಣ್ಣ ಅಥವಾ ದೊಡ್ಡ) ಯಾವದೇ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರಲಿ; ಅವರ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ

$$\frac{\text{ಪರಿಘ}}{\text{ವ್ಯಾಸ}} \cdots\cdots\cdots (೧)$$

ಈ ಗುಣೋತ್ತರವು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದೇ ಇರುವದು. ಪೂರ್ಣಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೇಳಲಿಕ್ಕೆ ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಿಂದ ಬರಲಾರದು; ಆದರೆ ಆದರ ಅಂದಾಜಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೆಗೆಯ ಬಹುದು:—

ಒಂದು ಕೊಳಿವೆಯಂಥ (Cylindrical) ಪದಾರ್ಥವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ ಅದರ ಸುತ್ತಲು ಒಂದು ಕಾಗದವನ್ನು ಸುತ್ತಿ ಅದರ ಅಂಚುಗಳು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಬರುವಂತೆ ಮಾಡಿರಿ. ಆ ಅಂಚುಗಳ ಮೇಲೆ ಸೂಜೀ ಚುಚ್ಚಿ ಛಿದ್ರಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಆ ಕಾಗದವನ್ನು ಬಿಚ್ಚಿ ಎರಡು ಛಿದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಅಂದರೆ ಅದು ಆ ಪದಾರ್ಥದ ಪರಿಘದ ಅಳತೆ ಯಾಗುವದು. ಆ ಪದಾರ್ಥದ ವ್ಯಾಸ ಅಳೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ (೧) ಈ ಗುಣೋತ್ತರದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವ್ಯಾಸಗಳ ಕೊಳಿವೆಯಂಥ ಪದಾರ್ಥಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೇಲ್ಕಂಡ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಹಲವು ಸಾರೆ ಮಾಡಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಬರುವ ಗುಣೋತ್ತರದ ಬೆಲೆಯು ಬಹಳವಾಗಿ ಅಷ್ಟಷ್ಟೇ ಇರುವದೆಂದು ನೀವು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯ ಬಹುದು.

(೧) ಈ ಗುಣೋತ್ತರದ ಬೆಲೆಯು ಸುಮಾರು ೩$\frac{೧}{೭}$ ದಷ್ಟು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವರು. ಇದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸರಿಯಾದ ಬೆಲೆಯು ೩·೧೪೧೬ ಹೀಗೆ (ನಾಲ್ಕು ದಶಾಂಶ ಸ್ಥಳಗಳ ವರೆಗೆ ಸರಿಯಿರುವ) ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವರು. (೧) ಈ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ ಪೂರ್ಣಾಂಶದಿಂದ ಸರಿಯಿರುವ ಬೆಲೆಯು ದಶಾಂಶ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಹೊರಡಲಾರದು; ಅದನ್ನು π ಈ **ಗ್ರೀಕ ಅಕ್ಷರ** ದಿಂದ ತೋರಿಸುವರು. ಅಂದರೆ,

ಪರಿಘ $= \pi \times$ **ವ್ಯಾಸ** $= ೨\pi \times$ **ತ್ರಿಜ್ಯ.**

ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೆಗೆಯುವರು:—

ವರ್ತುಳದ ಸುತ್ತಲು (ಅದರ ಹೊರಬದಿಗೆ **ನ** ಭುಜವುಳ್ಳ ಒಂದು ಸುಸಮ (Regular) ಬಹುಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು **ತ,** ಮತ್ತು ಬಹುಕೋನದ ಭುಜ **ಬ** ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ವರ್ತುಳದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬಹುಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಬಹುಕೋನದಲ್ಲಿ ಏಕರೂಪವಾಗಿರುವ **ನ** ತ್ರಿಕೋನಾತ್ಮಕ ಭಾಗಗಳು ಉಂಟಾಗುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ:—

$$\text{ಬಹುಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ} = \text{ನ} \times (\text{ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ})$$
$$= \text{ನ}\left(\tfrac{1}{2}\text{ಬ ತ}\right) = \tfrac{1}{2}\text{ತ}(\text{ನಬ})$$
$$= \tfrac{1}{2}\text{ತ} \times \text{ಬಹುಕೋನದ ಪರಿಮಿತಿ} \ldots\ldots (೨)$$

ನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ದೊಡ್ಡದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಮೇಲಿನ (೨) ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ. **ನ** ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಮರ್ಯಾದಿತವಾಗಿ ಬೆಳಿಸಿದರೆ, ಬಹಿಃಸ್ಪರ್ಶ ಬಹುಕೋನದ ಪರಿಮಿತಿಯು, ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘದಷ್ಟು ಆಗುವದು; ಮತ್ತು ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು, ಅದರ ಬಹಿಃಸ್ಪರ್ಶ ಬಹುಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುವದು.

$$\therefore \text{ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ} = \tfrac{1}{2}\text{ತ} \times \text{ಪರಿಘ}$$
$$= \tfrac{1}{2}\text{ತ} \times ೨\pi\text{ತ}$$
$$= \pi\text{ತ}^{೨}$$

$\therefore$ **ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ** $= \pi\text{ತ}^{೨}$.

೩೦ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ವರ್ತುಳಗಳ ರಚನೆಯು

[ಈ ಪರಿಚ್ಛೇದವು ಮುಂಬಯಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಭೂತವಿಲ್ಲ.]

ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯುವಾಗ ಎರಡು ಸಂಗತಿಗಳು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರಬೇಕು:—

(೧) **ಕೇಂದ್ರದ ಸ್ಥಾನ,** ಮತ್ತು (೨) **ತ್ರಿಜ್ಯದ ಉದ್ದಳತೆ** ಕೊಟ್ಟ ನಿಯಮಾನುಸಾರವಾಗಿ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕಿದ್ದರೆ, ಈ ಎರಡೂ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು. ಸರ್ವ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ (ಯಾವಾಗಲೂ ಅಲ್ಲ) ಎರಡು ಬಿಂದುಪಥಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿಶ್ಚಯ ಮಾಡಬಹುದು. ಈ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು:—

ವರ್ತುಳ	ಕೇಂದ್ರದ ಬಿಂದುಪಥ
(೧) **ಅ, ಬ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವ.	(೧) **ಅಬ** ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ.
(೨) ಕೊಟ್ಟ **ಕ್ಷ'** ರೇಖೆಗೆ ಕೊಟ್ಟ **ಅ** ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ.	(೨) **ಕ್ಷ'** ಮೇಲಿನ **ಅ** ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಲಂಬ.
(೩) ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ.	(೩) ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿಯ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಖೆಗಳ ಜೋಡು.
(೪) ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ.	(೪) ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ.
(೫) **ವ** ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅದರ ಪರಿಘದಲ್ಲಿಯ ಕೊಟ್ಟ **ಅ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ.	(೫) ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಬೆಳಿಸಿದ **ವಅ** ರೇಖೆ.
(೬) ಕೊಟ್ಟ **ಅ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ **ತ** ದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ.	(೬) **ಅ** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ **ತ** ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ತೆಗೆದ ವರ್ತುಳ.

(೭) ಕೊಟ್ಟ ಕ್ಷ' ರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ತದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ.	(೭) ಕ್ಷ' ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ತ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಜೋಡು.
(೮) (ವ, ರ) ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ತದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ.	(೮) (ವ, ರ ೮ ತ) ಮತ್ತು (ವ, ರ + ತ) ಈ ವರ್ತುಳಗಳ ಜೋಡು.

ಕೇಂದ್ರದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುಪಥಗಳು ಎರಡೂ ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕಗಳಿದ್ದರೆ, (ಅವು ಸಮಾಂತರವಿಲ್ಲದಾಗ) ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರ ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಒಂದು ಬಿಂದು ಪಥವು ಸರಳರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ, ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಇಲ್ಲವೆ ಎರಡೂ ಬಿಂದುಪಥಗಳು ವರ್ತುಳಾತ್ಮಕಗಳಾಗಿಯೂ ಇದ್ದರೆ, ಸರ್ವ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಕೇಂದ್ರದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಇರುವವು. (ಕೆಲವು ವಿಶಿಷ್ಟ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಬಿಂದು ಇರಬಹುದು; ಅಥವಾ ಒಂದೂ ಇರಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ.)

ಕೇಂದ್ರದ ಸ್ಥಾನವು ನಿಶ್ಚಿತವಾದ ಮೇಲೆ, ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅಳತೆಯಷ್ಟು ಕೊಟ್ಟ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ವಿವೇಚನೆಯಿಂದ ನೀವು ಒಂದು ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಊಹಿಸಿರ ಬಹುದು. ಸರ್ವಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಮೂರು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಕೊಡುವರು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ನಿಯಮಗಳಿಂದ ನಾವು ಕೇಂದ್ರದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವೆವು. ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ನಿಯಮದಿಂದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವೆವು.

ಆ ನಿಯಮಗಳು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇರಬಹುದು:—

(೧) ವರ್ತುಳವು ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.

(೨) ವರ್ತುಳವು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.

(೩) ವರ್ತುಳವು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು.

(೪) ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಕೊಟ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಯಷ್ಟು ಇರುವದು.

ಮೇಲ್ಕಂಡ ನಿಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ನಿಯಮಗಳ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಈ ಮೊದಲೇ ನಾವು ಅರಿತುಕೊಂಡಿರುವೆವು:—

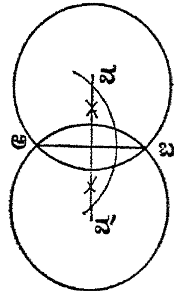
(೧) ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು. (ಕೃತ್ಯ ೨೦).

(೨) ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರೂ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು. (ಕೃತ್ಯ ೨೧ ಮತ್ತು ೨೨.) ಇಂಥ ನಾಲ್ಕು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು. ಒಂದು ಅಂತರ್ವೃತ್ತ, ಮತ್ತು ಮೂರು ಬಹಿರ್ವೃತ್ತಗಳು.

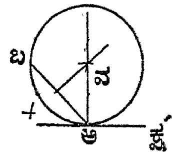
ವರ್ತುಳ ರಚನೆಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳೋಣ:—

(೩) ಅ ಮತ್ತು ಬ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ಪೃಥಃಕರಣ:— ವರ್ತುಳವು **ಅ, ಬ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗಬೇಕಿದ್ದರೆ, ಆ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರವು **ಅಬ** ರೇಖೆಯ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ **ತ** ತ್ರಿಜ್ಯವು ಅ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೊರಟು ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಮುಟ್ಟುವದೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಅಂದರೆ ಕೇಂದ್ರವು (**ಅ, ತ**) ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿರಲೇ ಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ಹೊರಟ ಎರಡು ಬಿಂದುಪಥಗಳು **ವ** ಮತ್ತು **ವ'** ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ (**ವ, ತ**) ಮತ್ತು (**ವ', ತ'**) ಇವು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳಗಳಾಗುವವು. ಒಂದು ವೇಳೆ **ತ** < ½ **ಅಬ,** ಹೀಗೆ ಇದ್ದರೆ, ಕೊಟ್ಟ ನಿಯಮಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರಲಾರದು.



(೪) ಕೊಟ್ಟ **ಕ್ಷ'** ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಆ ರೇಖೆ



ಯಲ್ಲಿರದ **ಬ** ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳ ವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

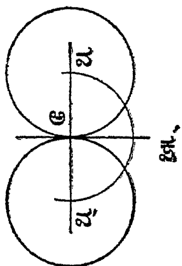
ಪೃಥಃಕರಣ :— ವರ್ತುಳವು **ಕ್ಷ**′ ರೇಖೆಯ **ಅ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುತ್ತಿರುವದರಿಂದ, ಅದರ ಕೇಂದ್ರವು **ಕ್ಷ**′ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ **ಅ** ಬಿಂದು ವಿನಿಂದ ತೆಗೆದ ಲಂಬದಲ್ಲಿರುವದು ಸಹಜವಿದೆ.

ವರ್ತುಳವು **ಅ** ಮತ್ತು **ಬ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು; ಆದ್ದರಿಂದ ಆದರ ಕೇಂದ್ರವು **ಅಬ** ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವದು.

ಇವೆರಡು ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು **ವ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸು ವವು. ಆದ್ದರಿಂದ (**ವ**, **ವಅ**) ವರ್ತುಳವು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳವಾಗುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವರ್ತುಳ ಹೊರಡುವದು.

(೫) ಕೊಟ್ಟ **ಕ್ಷ**′ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ **ಅ** ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ **ತ** ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ಪೃಥಃಕರಣ :—ವರ್ತುಳವು **ಕ್ಷ**′ ರೇಖೆಯ **ಅ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುತ್ತಿರುವದರಿಂದ, ಆದರ ಕೇಂದ್ರವು **ಕ್ಷ**′ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ **ಅ** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೆಗೆದ ಲಂಬದಲ್ಲಿರುವದು.

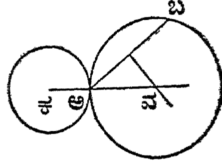


ವರ್ತುಳವು **ಅ** ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು; ಮತ್ತು ಆದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು **ತ** ಆಗಿದೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಕೇಂದ್ರವು (**ಅ, ತ**) ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘ ದಲ್ಲಿದೆ.

ಈ ಎರಡು ಬಿಂದು ಪಥಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು **ವ, ವ**′ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ (**ವ, ತ**) ಮತ್ತು (**ವ′, ತ**) ಇವು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳ ಗಳಾಗುವವು.

(೬) ಕೊಟ್ಟ (**ಕ, ಕಅ**) ವರ್ತುಳದ ಕೊಟ್ಟ **ಅ** ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಅದರ ಹೊರಗೆ ಕೊಟ್ಟ **ಬ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ಪೃಥಃಕರಣ:— ವರ್ತುಳವು ಕೊಟ್ಟ (**ಕ**, **ಕಅ**) ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ **ಅ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುತ್ತಿರುವದರಿಂದ ಅದರ ಕೇಂದ್ರವು ಇಬ್ಬದಿಗೆ ಬೆಳಿಸಿದ **ಕಅ** ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವದು.

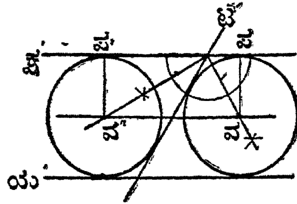


ವರ್ತುಳವು **ಅ**, **ಬ** ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಿರುವದರಿಂದ ಅದರ ಕೇಂದ್ರವು **ಅಬ** ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವದು.

(ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ **ಅ** ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ **ಬ** ಬಿಂದು ಇರದಿದ್ದರೆ,) ಮೇಲಿನ ಎರಡು ರೇಷಾತ್ಮಕ ಬಿಂದು ಪಥಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು **ವ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಮತ್ತು (**ವ**, **ವಅ**) ವರ್ತುಳವು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳವಾಗುವದು.

(೭) **ಕ್ಷ'**, **ಯ'** ಕೊಟ್ಟ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳ **ಟ'** ಛೇದಕ ರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ಪೃಥಃಕರಣ :— ವರ್ತುಳವು **ಕ್ಷ'ಯ'** ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುತ್ತಿರುವದರಿಂದ ಅದರ ಕೇಂದ್ರವು, ಆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಟ್ಟ ನಡುವೆ ಇರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಮೂರನೆಯ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವದು.

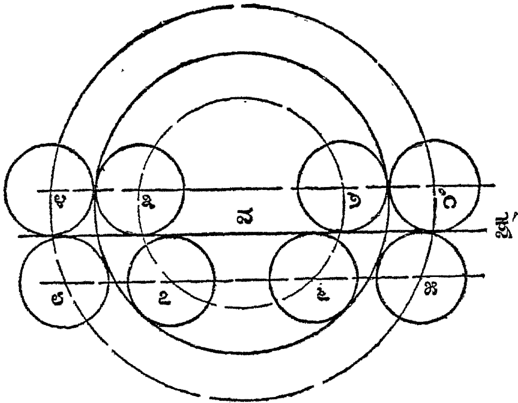


ವರ್ತುಳವು **ಕ್ಷ'**, **ಟ'** ಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುತ್ತಿರುವದರಿಂದ ಅದರ ಕೇಂದ್ರವು, ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಂದುಂಟಾದ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಖಾಯುಗ್ಮಗಳಲ್ಲಿರುವದು.

ಈ ಎರಡು ಬಿಂದು ಪಥಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳು **ವ**, **ವ'** ಇರುವವು.

ಇನ್ನು ವರ್ತುಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕ್ಷ' ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿ, ವ ಮತ್ತು ವ' ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಎರಡು ಲಂಬ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳು ತ ದಷ್ಟು ಇರುವದರಿಂದ **(ವ, ತ)** ಮತ್ತು **(ವ', ತ)** ಇವೆರಡು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳಗಳಾಗುವವು.

*(೮) ಕೊಟ್ಟ ಕ್ಷ' ರೇಷೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ (ವ, ರ) ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಹಾಗೂ ಕೊಟ್ಟ ತ ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.



ಪೃಥಃಕರಣ :—ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳವು ತ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟಿದ್ದು ಕ್ಷ'ಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಕೇಂದ್ರದ ಬಿಂದುಪಥವು ಕ್ಷ'ದಿಂದ ತ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಕ್ಷ'ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಷಾಯುಗ್ಮಗಳಲ್ಲಿರುವದು.

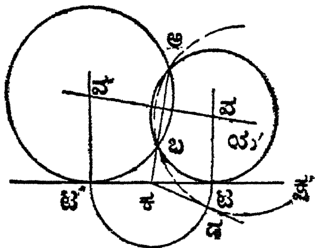
ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳವು (ವ, ರ) ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು ಮತ್ತು ಆದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು ತ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಆದರ ಕೇಂದ್ರದ ಬಿಂದುಪಥವು **(ವ, ರ + ತ)**, **(ವ, ರ − ತ)** ಎಂಬ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿರುವದು.

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಪಥಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸರ್ವಸಾಧಾರಣ ವಾಗಿ ಎಂಟು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ **ತ** ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಎಂಟು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯ ಬಹುದು. ಮತ್ತು ಅವು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳಗಳಾಗುವವು. (ಇಲ್ಲಿ **ತ** < **ರ** ಎಂದು ಗೃಹೀತ ಹಿಡಿದಿದೆ.) ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಪಥಗಳನ್ನು ಖಂಡ–ತುಂಡಾದ ವರ್ತುಳಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಿದೆ.

ವ ದಿಂದ **ಕ್ಷ**'ದ ಅಂತರವನ್ನು **ಡ** ದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದರೆ, ಮತ್ತು **ರ** ದ ಉದ್ದಳತೆಯು **ಡ** + ೨**ತ** ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಎಂಟಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ವರ್ತುಳಗಳು ಹೊರಡುವವು.

ಕೇಂದ್ರದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವಾಗ, ಎರಡು ಬಿಂದು ಪಥಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಒಂದೊಂದು ಸಲ ಸಹಜ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವದಿಲ್ಲ; ಇಂಥ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಇಷ್ಟ ಕೃತ್ಯದ ಪೃಥಃಕರಣವನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡ ಬೇಕಾಗುವದು. 'ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ' ಎಂದು ಗೃಹೀತ ಹಿಡಿದು, ಅದು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಗೆ ಅಥವಾ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ಸ್ಪರ್ಶ-ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಬೇಕು. ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ ೬೬ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನೂ ಅವರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನೂ ಎಷ್ಟೋ ಸಲ ಉಪ ಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಇಂಥದೊಂದು ಮಾದರಿಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ (೯) ನೆಯ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

*(**೯**) ಕೊಟ್ಟ **ಅ** ಮತ್ತು **ಬ** ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ **ಕ್ಷ**' ರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.



ಪೃಥಃಕರಣ:—ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳವು **ಅ** ಮತ್ತು **ಬ** ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗು ವದರಿಂದ, ಅದರ ಕೇಂದ್ರದ ಬಿಂದುಪಥವು **ಅಬ** ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವಾದ **ಯ**' ರೇಖೆ ಯಲ್ಲಿರುವದು.

(ಎರಡನೆಯ ಬಿಂದುಪಥವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಸುಲಭವಿಲ್ಲ.) ಇಷ್ಟ-ವರ್ತುಳವು ಕ್ಷ′ ರೇಖೆಯನ್ನು **ಟ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. **ಅಬ** ರೇಖೆಯನ್ನು ಬೆಳಿಸಿರಿ; ಅದು ಕ್ಷ′ಕ್ಕೆ **ಕ** ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ೬೬ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ **ಕಟ**^{2} = **ಕಅ·ಕಬ.** ಇದರಿಂದ **ಕಟ** ಉದ್ದಳತೆಯು ತಿಳಿಯುವದು. **ಅ, ಬ** ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಯಾವದೊಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. (ಅದರ ಪರಿಘವನ್ನು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಖಂಡ-ತುಂಡ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಿದೆ.) **ಕ** ದಿಂದ ಆ ವರ್ತುಳದ **ಕಡ** ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಂದರೆ **ಕಡ**^{2} = **ಕಅ·ಕಬ**; ಆದ್ದರಿಂದ **ಕಟ** ಇದು **ಕಡ** ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದೆ. (**ಕ, ಕಡ**) ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅದು ಕ್ಷ′ ರೇಖೆಯನ್ನು **ಟ** ಮತ್ತು **ಟ′** ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳಾಗುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕ್ಷ′ದ ಮೇಲೆ **ಟ** ಮತ್ತು **ಟ′**ಗಳಿಂದ ಲಂಬಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವು **ಯ′** ರೇಖೆಯನ್ನು **ವ** ಮತ್ತು **ವ′**ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು.

(**ವ, ವಟ**) ಮತ್ತು (**ವ′, ವ′ಟ′**) ಇವೆರಡು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳಗಳಾಗುವವು.

(೧೦) **ಕ** ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷ′ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿಯ ಕೊಟ್ಟ **ಅ** ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ಪೃಥಃಕರಣ :— ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳವು ಕ್ಷ′ಕ್ಕೆ **ಅ** ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುತ್ತಿರುವದರಿಂದ, ಅದರ ಕೇಂದ್ರವು ಕ್ಷ′ದ ಮೇಲೆ **ಅ**ದಿಂದ ತೆಗೆದ **ಯ′** ಲಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವದು.

ಇಷ್ಟವರ್ತುಳವು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಟ** ಬಿಂದು

ವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವದೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಅಂದರೆ ಇಷ್ಟವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರವು **ಕಟ** ದ ಮೇಲೆ, ಇಲ್ಲವೆ ಬೆಳಿಸಿದ **ಕಟ** ದ ಮೇಲೆ ಇರುವದು. ಈ ರೇಷೆಯು **ಯು**′ ರೇಷೆಯನ್ನು **ವ** ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. **ಅಟ** ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಬೆಳಿಸಿರಿ; ಅದು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಬ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಅಂದರೆ,

∠ **ವಅಟ** = ∠ **ವಟಅ**; ಮತ್ತು ∠ **ಕಬಟ** = ∠ **ಕಟಬ**.

ಪರಂತು ∠ **ವಟಅ** = ∠ **ಕಟಬ**. (ವಿರುದ್ಧ ಕೋನ)

∴ ∠ **ವಅಟ** = ∠ **ಕಬಟ**.

∴ **ಕಬ** ∥ **ಅಬ**; ಅಂದರೆ **ಕಬ** ∥ **ಯು**′;

ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ರಚನೆಯು ತಿಳುವಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವದು:—

ರಚನೆ:— **ಕ್ಷ**′ ದ ಮೇಲೆ **ಅ** ದಿಂದ **ಯು**′ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ; **ಯು**′ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ **ಬಡ** ವ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ; **ಬಅ** ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಈ ರೇಷೆಯು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಟ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಕಟ** ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಬೆಳಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ ಅದು **ಯು**′ ಕ್ಕೆ **ವ** ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. (**ವ, ವಅ**) ಇದು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳವು.

ಡ ಮತ್ತು **ಅ** ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಮತ್ತು ಮೇಲಿನಂತೆ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಇದರಿಂದ ನೀವು **ವ**′ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು; ಮತ್ತು (**ವ**′, **ವ**′**ಅ**) ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಇಷ್ಟ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು.

ಆದರೆ ಈ ರಚನೆಯು ಯಾವಾಗ ಸಾಧ್ಯವಾಗಲಾರದು?

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ರಚನೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಸ್ವತಃ ತೆಗೆಯಬಹುದು.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ:—

(೧೧) ಕೊಟ್ಟ ರೇಷೆಯ ಆದರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ರೇಷೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ;

(೧೨) ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿಯ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿಗೆ; ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೊಟ್ಟ ರೇಷೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ;

(೧೩) ಒಂದು ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ, ಒಂದು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ;

(೧೪) ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ, ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ;

(೧೫) ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ;

(೧೬) ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ;

(೧೭) ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ;

(೧೮) ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ;

(೧೯) ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ; (ಮೇಲಿನ ೯ ನೆಯ ರಚನೆಯಂತೆ ಇದರ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ)

(೨೦) ಕೊಟ್ಟ ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ; (ಮೇಲಿನ ೧೦ ನೆಯ ರಚನೆಯಂತೆ ಇದರ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.)

*(೨೧) ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟದ್ದೊಂದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ; (ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ನಾಲ್ಕು ವರ್ತುಳಗಳು.)

*(೨೨) ಕೊಟ್ಟ ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ;

*(೨೩) ಕೊಟ್ಟ ಮೂರು ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ;

*(೨೪) ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿಯ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ; ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ;

*(೨೫) ಕೊಟ್ಟ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ, ಕೊಟ್ಟ ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ ಇರುವ.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಮುದಾಯ ೪.

ಅ

೧. ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಪಫ ಜ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ ವ್ಯಾಸವಿದೆ. ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಪಫ ಬೆಳಿಸಿ ಅದರ ಮೇಲೆ ಅ ಮತ್ತು ಬ ಬಿಂದು ಗಳಿಂದ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಲ$_೧$ ಮತ್ತು ಲ$_೨$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಬೇಕಾದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಅಬ ಮತ್ತು ಪಫ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ:—

(೧) ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ವರ್ತುಳದ ಒಳಬದಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ
ಲ$_೧$ ∾ ಲ$_೨$ = ನಿಯತ ಸಂಖ್ಯೆ.

(೨) ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ವರ್ತುಳದ ಹೊರಬದಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ
ಲ$_೧$+ಲ$_೨$= ನಿಯತ ಸಂಖ್ಯೆ. ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಅ,ಪ,ಲ,ಮ,ಫ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಕಂಸ ಅಪ= ಕಂಸ ಪಲ ಮತ್ತು ಕಂಸ ಅಫ= ಕಂಸ ಫಮ ಇದ್ದರೆ ಪಫ ರೇಖೆಯು ಅಲ, ಅಮ ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

೩. ಎರಡು ಸಮಾನ ವರ್ತುಳಗಳು ಪ ಮತ್ತು ಫ ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವವು. ಪ ದಿಂದ ಯಾವದೊಂದು ಅಪಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಆ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಅಬ ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದು ಪಥವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೪. △ ಅಬಕ ದ ಬ ಮತ್ತು ಕ ಬಿಂದುಗಳ ಎದುರಿನ ಬಹಿರ್ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಯ$_೨$, ಯ$_೩$ ಇರುವವು. ಆದರೆ, ಬ,ಕ,ಯ$_೨$, ಯ$_೩$ ಇವು ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘದಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮದಿಂದ ಅ, ಬ, ಕ, ಡ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಮಅ • ಮಕ= ಮಬ • ಮಡ ಆಗುವಂತೆ ಆ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. (ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

ಕ

೧. △ ಅಬಕ ದ ಬ ಮತ್ತು ಕ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ, ಮತ್ತು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಬೆಳಿಸಿದ ಅಬ, ಅಕ ಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೨. ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಆಯತವಿದೆ. ಮತ್ತು ಡಪ ಜ್ಯಾರೇಷೆಯು ಡಕ ದಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಪಬ = ಬಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

೩. ತಳರೇಷೆ, ಅಂತರ್ ತ್ರಿಜ್ಯ, ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದುಂಟು. ಇವುಗಳಿಂದ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

[ಬಕ ಕೊಟ್ಟ ತಳ ರೇಷೆಯಿದೆ; ಮತ್ತು ಪರಿವೃತ್ತದ ಬಕ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಈ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಇದ್ದರೆ, ಈಬ = ಈಯ. ಇಲ್ಲಿ ಯ ಅಂತರ್ಮಧ್ಯವಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಯ ದ ಸ್ಥಾನ ಹೊರಡುವದು. ಬೆಳೆಸಿದ ಈಯ ರೇಷೆಯು ಅ ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು.]

೪. △ಅಬಕದ ಬಕ, ಕಅ, ಅಬ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ, ಫ, ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. △ ಬಪರ ಹಾಗೂ △ ಕಪಫ ಇವುಗಳ ಪರಿವೃತ್ತಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಪುನಃ ಮ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ ಅ, ರ, ಮ, ಫ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

ಅದರಂತೆ, ಅರಫ, ಬಪರ, ಕಪಫ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪರಿವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಮ ಇದೊಂದು ಸಾಧಾರಣ ಬಿಂದುವಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಅ,ಬ,ಕ ಗಳಿಂದ ಅವುಗಳ ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬಗಳ ಪಾದ ಬಿಂದುಗಳು ಪ,ಫ,ರ ಇದ್ದರೆ, ಮ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಯಾವದು ?

೫. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ ಇದೊಂದು ವ್ಯಾಸವಿದೆ. ಈ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಅಕ, ಬಡ ಜ್ಯಾರೇಷೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಮ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ ಅಬ^2 = ಅಕ. ಅಮ + ಬಡ. ಬಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

ಖ

೧. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದ ತೆಗೆದ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಪ ಮತ್ತು ಫ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಅಬದಲ್ಲಿ ಮ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ. ಪದಿಂದ ಮಪದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬ ರೇಷೆಯು ಆ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಕ್ಷ ಮತ್ತು ಯ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಕ್ಷಪ = ಪಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಒಳ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸದ ಅಬ ಮತ್ತು ಕಡ ಜ್ಯಾರೇಷೆಗಳಿವೆ. ಅಬ ಮತ್ತು ಕಡ ಎಂಬ ಲಘು ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿ ಮ ಮತ್ತು ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಮನ ರೇಷೆಯು ಅಬ ಮತ್ತು ಕಡ ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[ಮ ಮತ್ತು ನ ಗಳಿಂದ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ.]

೩. △ಅಬಕದಲ್ಲಿ ಪ ಇದೊಂದು ಲಂಬ ಸಂಪಾತವಿದೆ. ಅಪ, ಬಪ, ಕಪ ಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಷ, ಯ, ಝ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳವು ಕ್ಷ, ಯ, ಝ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಮೇಲಿನ ೩ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನೂ, ಉದಾ. ಸಂಗ್ರಹ ೨೭ರಲ್ಲಿಯ ೩೦ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನೂ ಒಂದು ಕೂಡಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಮಹತ್ವದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ :—

ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು, ಎತ್ತರಗಳ ಪಾದಬಿಂದುಗಳು, ಮತ್ತು ಲಂಬ ಸಂಪಾತಕ್ಕೆ ಕೋನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿರುವವು.

ಈ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ **ನವಬಿಂದು ವೃತ್ತ** (Nine points circle) ಅನ್ನುವರು.

೫. ವರ್ತುಳ ಖಂಡದ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದಳತೆಯು ೨ಕ ಇದೆ. ಅದರ ಅರ್ಧ ಕಂಸದ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದಳತೆಯು ಅ ಇದೆ. ವರ್ತುಳ ಖಂಡದ ಎತ್ತರವು ಊ ಇದೆ. ಮತ್ತು ಈ ವರ್ತುಳ ಖಂಡವು ಯಾವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿರುವದೋ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು ತ ಇದೆ. ಆದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

(೧) ಕ^{೨} = ಊ (೨ತ – ಊ);

(೨) ಅ^{೨} = ೨ತಊ.

ಗ

೧. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಅಬ ಮತ್ತು ಕಡ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಲಂಬಗಳಾಗಿವೆ. ಹಾಗೂ ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳದ ಒಳಬದಿಯಲ್ಲಿ ಪ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ತ ಇದ್ದರೆ:—

ಅಬ^{೨} + ಕಡ^{೨} = ೮ತ^{೨} – ೪ಮಪ^{೨} ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ವರ್ತುಳದ ಅಬ ಮತ್ತು ಕಡ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಪ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕಾಟಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಬೆಳಿಸಿದ ಪಡ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕಮ = ಪಬ ಆಗುವಂತೆ ಮ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮತ್ತು ಬಡ ⊥ ಅಮ ಮತ್ತು ಅಡ ⊥ ಬಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ತ್ರಿಕೋನದ ಮ ಪರಿಮಧ್ಯ, ಪ ಲಂಬ ಸಂಪಾತ, ಗ ಗುರುತ್ವ ಮಧ್ಯ, ನ ನವಬಿಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಇವೆಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಅದರಂತೆ (೧) ಮನ = ನಪ; (೨) ಮಗ = ೧/೨ಗಪ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. △ಅಬಕದ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಅದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಬೆಳಸಿದ ಕಬ ರೇಖೆಗೆ ಟ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ∠ಕಅಬ ಮತ್ತು ∠ಅಟಬ ಇವುಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಅಬ = ಅಕ = ೫ ಸೆ. ಮಿ. ಮತ್ತು ಬಕ = ೮ ಸೆ. ಮಿ. ಅಡ ⊥ ಬಕ; ಅಡ ಬೆಳಸಿದರೆ ಅದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಅಈ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

(ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

ಘ

೧. ಎರಡು ಸಮಾನ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಆ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಯಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿಯ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. △ಅಬಕದಲ್ಲಿಯ ∠ಅದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು, ಅಕ್ಕೆ ಪರಿ ಮಧ್ಯದಿಂದ ಕೂಡಿಸಿದ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅದಿಂದ ಬಕದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬರೇಖೆ ಇವುಗಳಿಂದ ಆದ ಕೋನವನ್ನೂ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನೂ, ಅದರ ಹೊರಗೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದುಂಟು. ಆ ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಛೇದಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಆ ರೇಖೆಯು ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಗಳು ಅಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಾಟಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿರಬೇಕು.

೪. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಎರಡು ವರ್ತುಳ ಖಂಡಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಅದರಿಂದ ಒಂದು ಖಂಡದಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ಖಂಡದಲ್ಲಿಯ ಕೋನದ (೧) ಇಮ್ಮಡಿ ಆಗಿರಬೇಕು; (೨) ಮುಮ್ಮಡಿ ಆಗಿರಬೇಕು.

೫. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೊಂದು ಮು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡು ರೇಷೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅವು ಆ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ, ಫ ಮತ್ತು ರ, ಸ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ, ಪ, ಫ, ರ, ಸ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫

೧. ಮೂರು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಜೋಡು ಜೋಡಾಗಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಅವುಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವವು; ಅಥವಾ ಬೆಳಿಸಿದರೆ ಅವು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವವು ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ, ಚೌರಸ ಮತ್ತು ನಿಯಮಿತ ಷಟ್‌ಕೋನ ಇವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಷ, ಯ ಮತ್ತು ಝ ಇದ್ದರೆ,

(೧) ಕ್ಷ೨ = ಯ೨ + ಝ೨ ; (೨) ಕ್ಷ೨ = ೩ಝ೨; ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಅ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅಂತಃಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು. ಹೊರಗಿನ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಬಕಡ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯು ಒಳಗಿನ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಕ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು. ಅಬ ಮತ್ತು ಅಡ ರೇಷೆಗಳು ಒಳಗಿನ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಈ ಮತ್ತು ಫ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ ಕಬಈ ಮತ್ತು ಅಕಫ ಇವು ಮಿಥಃಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿ ಉಂಟಾಗುವ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೫. ಕೊಟ್ಟದ್ದೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಶೋಧಿಸಿ ತೆಗೆಯಿರಿ; ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೋನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ತೆಗೆದ ರೇಷೆಗಳಿಂದುಂಟಾದ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು.

೭

೧. ಕೊಟ್ಟ ಕ್ಷ ರೇಷೆಯ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಅ ಮತ್ತು ಬ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಅಪ + ಪಬ ಈ ಬೇರೀಜು ಲಘುತ್ತಮ (ಅಂದರೆ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಕಡಿಮೆ) ಆಗುವಂತೆ ಕ್ಷ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

೨. ∠ಅ ಇದು ಕೊಟ್ಟ ಕೋನದಷ್ಟು, ಮತ್ತು ಅ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೋಗುವ ಮಧ್ಯರೇಷೆಯು ಕೊಟ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಯಷ್ಟು ಇರುವಂತೆ ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩. ಮ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ೨ ಸೆ. ಮಿ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ತೆಗೆದ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನೂ, ೩ ಸೆ. ಮಿ. ಉದ್ದಳತೆಯ ಅಬ ರೇಷೆಯನ್ನೂ, ಅವುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿರುವವು; ಅಮ = ೩.೫ ಸೆ. ಮಿ. ಮತ್ತು ಮಬ = ೫ ಸೆ. ಮಿ. ಅಬ ತಳರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳು ಬರುವಂತೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಗ ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಮಹತ್ತಮ, ಮತ್ತು ಲಘುತ್ತಮ ಆಗಿರಬೇಕು. ಅವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. (ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

೪. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಅಬ ವ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಅಂತರಗಳ ಮೇಲೆ ಪ ಮತ್ತು ಫ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಪ ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ ಯಾವದೊಂದು ಕಪಡ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮತ್ತು ಕಡ^{2} + ಕಫ^{2} + ಡಫ^{2} ಈ ಬೇರೀಜು ಯಾವಾಗಲೂ ನಿಯತವಾಗಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳ ಪಾದದಲ್ಲಿ (Quadrant of a circle), ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಫ

೧. ಅ ನಿಯತ ಬಿಂದುವಿದೆ, ಮತ್ತು ಕ್ಷ ನಿಯತ ರೇಷೆಯಿದೆ; ಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ ಚಲ ಬಿಂದುವಿದೆ; ಅಪದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಬೆಳಸಿದ ಅಪದಲ್ಲಿ ಫ ತೆಗೆದುಕೊಂಡದ್ದರಿಂದ ಅಪ.ಅಫ ಇದು ನಿಯತವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಫದ ಬಿಂದುಪಥವು ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಅ ಇದೊಂದು ನಿಯತ ಬಿಂದುವಿದೆ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟದ್ದೊಂದು ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಪ ಇದೊಂದು ಚಲಬಿಂದುವಿದೆ. ಅಪದಲ್ಲಿ (ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಬೆಳಸಿ) ಫ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದರಿಂದ ಅಪ.ಅಫ ಇದು ನಿಯತವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಫದ ಬಿಂದುಪಥವು ಒಂದು ಸರಳರೇಷೆಯಲ್ಲಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ ವ್ಯಾಸವಿದೆ. ಅಬದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ, ಅದನ್ನು ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆಯೂ ಕಡ ನಿಯತ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯು ಇದೆ.

ಕಡಕ್ಕೆ ಪ ದಲ್ಲಿಯೂ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಫ ದಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಅಪಫ ರೇಖೆ ಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅಪ. ಅಫ = ಅಕ^2 ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

(ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

೪. ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿಯ ಕರ್ಣರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಕಾಟಕೋನದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಚೌಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅವುಗಳ ಪದಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ.)

೫. ಕೊಟ್ಟ ಕ್ಷ ರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಮಗ್ಗಲಿಗೆ ಅ ಮತ್ತು ಬ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದು ಗಳಿವೆ. ∠ ಅಪಬ ಇದು ಮಹತ್ತಮವಾಗುವಂತೆ ಕ್ಷ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಪ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

[ಅ, ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಕ್ಷ ರೇಖೆಗೆ ಪ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಂದರೆ ಪ ಇದು ಇಷ್ಟಬಿಂದು ಆಗುವದು.]

ಜ

೧. ತ್ರಿಕೋನದ ತಳರೇಖೆಯನ್ನೂ ಶಿರಃಕೋನವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಕೋ ನದ ಲಂಬ ಸಂಪಾತದ ಬಿಂದುಪಥವು ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಕಂಸವಾಗಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. △ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ ಪ ಇದೊಂದು ಲಂಬ ಸಂಪಾತವಿದೆ. ಮತ್ತು ಬಡ ಇದು ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಿದೆ. ಆದರೆ ಅಕ, ಪಡ ಇವು ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವ ವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಬಹಿಃಸ್ಪರ್ಶವಾಗಿವೆ. ಆ ವರ್ತುಳಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದ ರೇಖೆಯು ವ್ಯಾಸವೆಂದು ತಿಳಿದು ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಮೊದಲಿನ ವರ್ತುಳಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. △ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ ಯ ಅಂತರ್‌ಮಧ್ಯವಿದೆ. ಬಯಕ ವರ್ತುಳವು, ಅವಶ್ಯ ವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಬೆಳಿಸಿದ ಅಬ ಮತ್ತು ಅಕ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಫ ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ, ಅಈ = ಅಬ ಮತ್ತು ಅಫ = ಅಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾ ಖಂಡದ ಎರಡು ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ತೆಗೆದ ವರ್ತುಳ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾ ಖಂಡಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ, ಆ ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಯು ಆ ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಯಾಗುವದು.

೩೪

೧. ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಅ ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿದೆ. ∠ ಬಅಕ ಇದು ಕೊಟ್ಟ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಅಬ ಮತ್ತು ಅಕ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಬ ಮತ್ತು ಕ ಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೨. ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಚೌಕೋನವು ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನವಾಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಒಂದೇ ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಎಲ್ಲ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ್ಮಧ್ಯಗಳ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೪. ಅ ಮತ್ತು ಬ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಬಹಿಃಸ್ಪರ್ಶ ವರ್ತುಳಗಳಿವೆ. ಈ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಒಂದು ಸಾಧಾರಣ ಸಮಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ವರ್ತುಳ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಕ್ಷ ಇದ್ದರೆ:—

$$\frac{೧}{\sqrt{ಕ್ಷ}} = \frac{೧}{\sqrt{ಅ}} + \frac{೧}{\sqrt{ಬ}}$$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೫. ಒಂದೇ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಭುಜಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳಿಂದುಂಟಾದ ಷಟ್‌ಕೋನವು ಸಮಭುಜವಾಗಿರುವದು; ಆದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅದು ಸಮಕೋನವಿರಲಾರದು.

ತಾತ್ತ್ವಿಕ ವಿವೇಚನೆ



ನಾಲ್ಕನೆಯ ಭಾಗ

ಸರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳು
ಮತ್ತು
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಭಾಗ

ಸರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

೩೧ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣ

[ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ೧೨ ನೆಯ ಪ್ರಕರಣದ ಉಜಳಣಿ ಮಾಡಿರಿ.]

ಸಜಾತೀಯ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳ ತುಲನೆಯನ್ನು ಹೇಳುವಾಗ, ಒಂದು ಪರಿಮಾಣವು ಇನ್ನೊಂದರ ಎಷ್ಟನೆಯ ಪಾಲು, ಅಥವಾ ಎಷ್ಟನೆಯ ಪಟ್ಟು ಎಂದು ನೋಡಬೇಕಾಗುವದು. ಉದಾಹರಣಾರ್ಥವಾಗಿ, ಒಂದು ರೇಷೆಯು ೬ ಇಂಚು, ಇನ್ನೊಂದು ೩ ಇಂಚು ಇರುವವು. ಆಗ ನಾವು ಮೊದಲಿನ ರೇಷೆಯು ಇನ್ನೊಂದರ ಇಮ್ಮಡಿ ಎಂದು ಹೇಳುವೆವು. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೧೦ ಚೌ. ಇಂಚು ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದರ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವು ೪ ಚೌ. ಇಂಚು ಇದ್ದರೆ, ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ $\frac{೧೦}{೪}$ ಅಥವಾ $\frac{೫}{೨}$ ಪಟ್ಟು ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವೆವು. ಇದನ್ನೇ ನಾವು ಬೇರೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಹೇಳ ಬಹುದು. ರೇಷೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ೬ಕ್ಕೆ ೩ ಅಥವಾ ೨ಕ್ಕೆ ೧, ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ೧೦ಕ್ಕೆ ೪ ಅಥವಾ ೫ಕ್ಕೆ ೨ ಎಂದೆನ್ನುವರು.

ತುಲನೆಯನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಆ ಪರಿಮಾಣಗಳು **ಒಂದೇ ಜಾತಿಯಲ್ಲಿ** ಇರಬೇಕೆಂಬುವದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಫೂಟು ಮತ್ತು ರೂಪಾಯಿಗಳ ತುಲನೆ ಯನ್ನು ಹೇಳಲಿಕ್ಕೆ ಬರಲಾರದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:— ಒಂದೇ ಜಾತಿಯ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳು ಅನುಕ್ರಮ ವಾಗಿ **ಅ** ಏಕಾಂಕ ಮತ್ತು **ಬ** ಏಕಾಂಕ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಪರಿಮಾಣಗಳ

ಗುಣೋತ್ತರವು **ಅ** ಕ್ಕೆ **ಬ** ಇರುವದು. ಅದನ್ನು **ಅ:ಬ** ಅಥವಾ **ಅ/ಬ** ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವರು.

ಗುಣೋತ್ತರವು **ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ** ಇರುವದು. ಅದು ಪರಿಮಾಣವಲ್ಲ ಎಂಬದನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

ಅಪರಿಚ್ಛೇದ ಶೀಲ (Incommensurable) ಪರಿಮಾಣಗಳು.

ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳ ತುಲನೆಯನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ, ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಿಂದ ಹೇಳಬಹುದೆಂದು ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಗೃಹೀತ ಹಿಡಿದಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಿಂದ ಅಳೆಯುವದಕ್ಕೆ **ಪರಿಚ್ಛೇದ ಶೀಲ** (Commensurable) ಪರಿಮಾಣಗಳೆನ್ನುವರು. ಆದರೆ ಕೆಲವು ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಿಂದ ಅಳೆಯಲಿಕ್ಕೆ ಬರುವಂತಿಲ್ಲ; ಉದಾ:— ಒಂದು ಚೌರಸದ ಭುಜವು ೧ ಇಂಚು ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಕರ್ಣವು $\sqrt{೨}$ ಇಂಚು ಇರುವದು. ಆದರೆ $\sqrt{೨}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವ್ಯವಹಾರೀ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದಾಗಲಿ, ದಶಾಂಶ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದಾಗಲಿ ಸರಿಯಾಗಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಹೇಳಲಿಕ್ಕೆ ಬರಲಾರದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಉಭಯ ಸಾಧಾರಣ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೇಳುವದು ಕಷ್ಟವಿದೆ. ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೇಳಲಿಕ್ಕೆ ಬರದಿದ್ದರೆ, ಆ ಪರಿಮಾಣಗಳಿಗೆ **ಅಪರಿಚ್ಛೇದಶೀಲ** (Incommensurable) ಅಥವಾ **ಅಪರಿಚ್ಛಿನ್ನ** ಎಂದೆನ್ನುವರು. ಇಂಥ ಅಪರಿಚ್ಛಿನ್ನ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣೋತ್ತರದಿಂದ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. (ಆಸನ್ನಮಾನದಿಂದ ತೋರಿಸಬಹುದು; ಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಸರಿಯಾಗಿ ತೋರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.) ಪರಿಚ್ಛೇದಶೀಲ ಮತ್ತು ಅಪರಿಚ್ಛೇದಶೀಲ ಹೀಗೆ ಎರಡೂ ಪ್ರಕಾರದ ಪರಿಮಾಣಗಳಿಗೆ ಹೋಲುವಂಥ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಕೊಡುವದು ಬಹಳೇ ಕಷ್ಟದ ಕೆಲಸವಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಪರಿಚ್ಛೇದಶೀಲ ಪರಿಮಾಣಗಳಿಗೆ ಹೋಲುವಂಥ ಸಿದ್ಧತೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕೊಟ್ಟಿರುವೆವು. ಈ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಅಪರಿಚ್ಛೇದಶೀಲ ಪರಿಮಾಣಗಳಿಗೂ ಹೋಲುವವೆಂದು ಗೃಹೀತ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:— ನಾಲ್ಕು ಪರಿಮಾಣಗಳ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಮಾನವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಅ, ಬ, ಕ, ಡ** ಇದ್ದರೆ, ಮತ್ತು **ಅ : ಬ = ಕ : ಡ** ಇದ್ದರೆ, ಆ ಪರಿಮಾಣಗಳು **ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ** (in proportion) ಇರುವವು; ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕೆ ಮೊದಲಿನ ಮೂರು ಪರಿಮಾಣಗಳ **ಚತುರ್ಥ ಪ್ರಮಾಣಪದ** (fourth proportional) ಎಂದೆನ್ನುವರು.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು **ಅ : ಬ : : ಕ : ಡ** ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವರು; ಮತ್ತು ಅದನ್ನು **ಅ** ಕ್ಕೆ **ಬ** ಇದ್ದಂತೆ **ಕ** ಕ್ಕೆ **ಡ** ಹೀಗೆ ಓದುವರು.

ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳು ಒಂದೇ ಜಾತಿಯವು ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪರಿಮಾಣಗಳೂ ಕೂಡಾ (ಅದೇ ಜಾತಿಯವು ಅಥವಾ) ಇನ್ನೊಂದು ಜಾತಿಯವು ಇರಬೇಕು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:— ಒಂದೇ ಜಾತಿಯ ಮೂರು ಪರಿಮಾಣಗಳಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಮಾನವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಅ, ಬ, ಕ** ಇದ್ದು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ **ಅ : ಬ = ಬ : ಕ** ಹೀಗೆ ಸಂಬಂಧವಿದ್ದರೆ, ಮೂರನೆಯ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕೆ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳ **ತೃತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಪದ** (third proportional) ಅನ್ನುವರು. ದ್ವಿತೀಯ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕೆ ಪ್ರಥಮ ಮತ್ತು ತೃತೀಯ ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲಿಯ **ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣಪದ** (mean proportional) ಅನ್ನುವರು.

ಅಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಬೆಳಿಸಿದ **ಅಬ** ದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು **ಕ್ಷ** ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, **ಅಬ** ದ **ಅಕ್ಷ : ಕ್ಷಬ** ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಗಳಾಗಬಹುದೆಂದು ಹೇಳುವರು. (ಪರಿ. ೧೮ ಪುಟ ೩೦ ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿ ನೋಡಿರಿ.)

$\frac{\text{ಅ}}{\text{ಬ}} = \frac{\text{ಕ}}{\text{ಡ}}$ ಇದ್ದರೆ ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸಹಜವಾಗಿ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಬಹುದು:—

(೧) **ಅಡ = ಬಕ**;

(೨) $\frac{\text{ಬ}}{\text{ಅ}} = \frac{\text{ಡ}}{\text{ಕ}}$; [ವ್ಯಸ್ತ ಕ್ರಿಯೆ (invertendo)]

(೩) $\frac{\text{ಅ}}{\text{ಕ}} = \frac{\text{ಬ}}{\text{ಡ}}$; [ಏಕಾಂತರ ಕ್ರಿಯೆ (alternando)]

(೪) $\frac{ಅ + ಬ}{ಬ} = \frac{ಕ + ಡ}{ಡ}$; [ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ (componendo)]

(೫) $\frac{ಅ - ಬ}{ಬ} = \frac{ಕ - ಡ}{ಡ}$; [ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ (dividendo)]

(೬) $\frac{ಅ + ಬ}{ಅ - ಬ} = \frac{ಕ + ಡ}{ಕ - ಡ}$; [ಯೋಗವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ (componendo and dividendo)]

ಆಯಾ ನಿಯಮಗಳ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಮುಂದೆ ಕಂಸುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿವೆ. ಅವುಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿಯ ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೪.

೧. ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ತೆಗೆಯಿರಿ. (೧) ೩ ಫೂಟು, ೪ ಇಂಚು; (೨) ೫ ರೂಪಾಯಿ, ೪ ಆಣೆ; (೩) ಸರಳ ಕೋನ, ೬೦°.

೨. ೮ ಇಂಚು, ೧ ಫೂಟು, ೨೦°, ೩೦° ಈ ಪರಿಮಾಣಗಳು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವವೇನು?

೩. (೧) ೩:೫ = ಕ್ಷ : ೧೫; (೨) ೧೦ : ಕ್ಷ = ಕ್ಷ : ೯೦ ಈ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿಯ ಕ್ಷದ ಬೆಲೆ ಹೇಳಿರಿ.

೪. (೧) ೫, ೬; (೨) ಅಬ, ಅ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತೃತೀಯ ಪ್ರಮಾಣ ಪದವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೫. ೧೨ ಮತ್ತು ೭೫ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೬. ಅಬ ರೇಷೆಯು ಕ್ಷ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ೨ : ೩ ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತಃಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ. ಕ್ಷ ಬಿಂದುವು ಅ, ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಹತ್ತಿರವಿರುವದು ?

೭. ಅಬ ರೇಷೆಯು ಕ್ಷ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ೨ : ೩ ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಹಿಃಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ. ಕ್ಷ ಬಿಂದುವು ಅ, ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಹತ್ತಿರವಿರುವಿರುವದು ?

೮. ಅಬ ರೇಷೆಯು ಕ್ಷ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ೩ : ೨ ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ಬಹಿಃಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ. ಕ್ಷ ಬಿಂದುವು ಅ, ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಹತ್ತಿರವಿರುವದು ?

೯. ೫ ಇಂಚು ಉದ್ದಳತೆಯ ಒಂದು ರೇಷೆಯು ೪:೫ ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ಅಂತಃಛೇದವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಈ ಎರಡು ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಹೇಳಿರಿ.

೧೦. △ಅಬಕದ ಅಬ, ಅಕ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಹ ಮತ್ತು ಖ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಆದರಿಂದ ಅಹ : ಹಬ = ಅಖ : ಖಕ ಇದ್ದರೆ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ:—

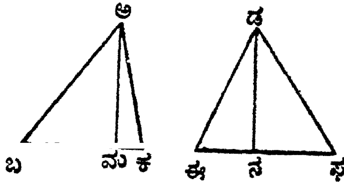
(೧) ಅಹ : ಅಬ = ಅಖ : ಅಕ ;

(೨) ಹಬ : ಅಬ = ಖಕ : ಅಕ.

ಅಂತಃಛೇದ ಮತ್ತು ಬಹಿಃಛೇದ ಈ ಎರಡೂ ಸಂಗತಿಗಳ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ ೬೯.

ಸಮಾನ ಎತ್ತರಗಳುಳ್ಳ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು, ಅವುಗಳ ತಳ ರೇಷೆಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುವವು.



ಪಕ್ಷ :— ಅಬಕ, ಡಈಫ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅಮ ಮತ್ತು ಡನ ಎತ್ತರಗಳು ಸಮಾನ ಆಗಿರುವವು.

ಸಾಧ್ಯ :— $\frac{\triangle \text{ಅಬಕ}}{\triangle \text{ಡಈಫ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಈಫ}}$

ಸಿದ್ಧತೆ:— $\frac{\triangle \text{ಅಬಕ}}{\triangle \text{ಡಈಫ}} = \frac{\frac{1}{2}\text{ಬಕ} \cdot \text{ಅಮ}.}{\frac{1}{2}\text{ಈಫ} \cdot \text{ಡನ}.}$

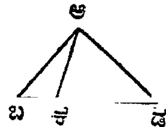
$\therefore \frac{\triangle \text{ಅಬಕ}}{\triangle \text{ಡಈಫ}} = \frac{\frac{1}{2}\text{ಬಕ} \cdot \text{ಅಮ}}{\frac{1}{2}\text{ಈಫ} \cdot \text{ಡನ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಈಫ}}$ ($\because$ ಅಮ = ಡನ)

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಒಂದು ಉಪಯುಕ್ತ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಕಾರವು:— ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ತಳರೇಷೆಗಳು ಒಂದೇ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿದ್ದು, ಅವುಗಳ

ಶಿರೋಬಿಂದು ಒಂದೇ ಇದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಎತ್ತರವು ಒಂದೇ ಇರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ತಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿರುವವು.

ಉದಾ:—ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ

$$\frac{\triangle \text{ಅಬಕ}}{\triangle \text{ಅಕಡ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಕಡ}}.$$



ಪ್ರಮೇಯ ೭೦.

ಕೊಟ್ಟ (ಅಬ) ರೇಖಾ ಖಂಡದಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟ (ಮ : ನ) ಗುಣೋತ್ತರದಿಂದ ಅಂತರ್ವಿಭಾಗ ಮಾಡುವ (ಪ ಇದು) ಒಂದೇ ಬಿಂದು ಇರುವದು.



ಸಿದ್ಧತೆ:— $\because \frac{\text{ಅಪ}}{\text{ಪಬ}} = \frac{\text{ಮ}}{\text{ನ}}$; (ಪಕ್ಷ)

$$\therefore \frac{\text{ಅಪ} + \text{ಪಬ}}{\text{ಪಬ}} = \frac{\text{ಮ} + \text{ನ}}{\text{ನ}} \text{ (ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ)}$$

ಅಂದರೆ $\frac{\text{ಅಬ}}{\text{ಪಬ}} = \frac{\text{ಮ} + \text{ನ}}{\text{ನ}}$

$$\therefore \text{ಪಬ} = \frac{\text{ನ}}{\text{ಮ} + \text{ನ}} \text{ ಅಬ} = \text{ನಿಶ್ಚಿತ ಉದ್ದ.}$$

ಮತ್ತು ಪ ಬಿಂದುವು ಅ ಹಾಗೂ ಬ ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವದು.

∴ ಪ ದ ಸ್ಥಾನವು ನಿಶ್ಚಿತವಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ ೭೧.

ಕೊಟ್ಟ (ಅಬ) ರೇಖಾಖಂಡದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ (ಮ:ನ) ಗುಣೋತ್ತರ ದಿಂದ ಬಹಿರ್ವಿಭಾಗ ಮಾಡುವ (ಫ ಇದು) ಒಂದೇ ಬಿಂದು ಇರುವದು.

ಫ ಅ ಬ ಅ ಬ ಫ

ಮ < ನ ಮ > ನ

ಸಿದ್ಧತೆ :— $\frac{\text{ಅಫ}}{\text{ಫಬ}} = \frac{\text{ಮ}}{\text{ನ}}$ (ಪಕ್ಷ)

$\therefore \frac{\text{ಅಫ} \backsim \text{ಫಬ}}{\text{ಫಬ}} = \frac{\text{ಮ} \backsim \text{ನ}}{\text{ನ}}$

$\therefore \frac{\text{ಅಬ}}{\text{ಫಬ}} = \frac{\text{ಮ} \backsim \text{ನ}}{\text{ನ}}$

$\therefore \text{ಫಬ} = \frac{\text{ನ}}{\text{ಮ} \backsim \text{ನ}}$ ಅಬ = ನಿಶ್ಚಿತ ಉದ್ದ.

ಮತ್ತು ಮ < ನ ಇದ್ದರೆ ಫ ಇದು ಬೆಳಿಸಿದ ಬಅ ದಲ್ಲಿ,

ಹಾಗೂ ಮ > ನ ,, ಫ ,, ,, ಅಬ ದಲ್ಲಿ ಇರುವದು.

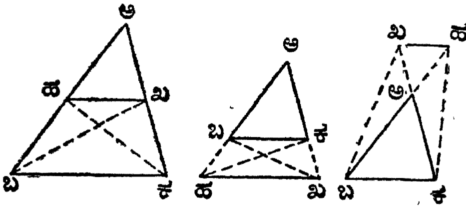
ಹೇಗಿದ್ದರೂ ಫದ ಸ್ಥಾನವು ನಿಶ್ಚಿತವಿದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ :— ಮ = ನ ಇದ್ದರೆ, ಬಹಿಚ್ಛೇದ ಮಾಡುವ ಫ ಬಿಂದುವು ಸಾಂತ ಸರಳ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿರಲಾರದು.

ಪ್ರಮೇಯ ೭೨. (ಮೂಲಭೂತ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

೧. ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಯು ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

೨. ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದ:—ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಅದು ಮೂರನೆಯ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವದು.



[೧] ಪಕ್ಷ:—ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಕ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆದ ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಅಬ, ಅಕ ಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಅವು ಬೆಳಸಿದಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಹ ಮತ್ತು ಖ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಸಾಧ್ಯ:— ಅಹ : ಹಬ = ಅಖ : ಖಕ.

ರಚನೆ:— ಕಹ, ಬಖ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— $\frac{\text{ಅಹ}}{\text{ಹಬ}} = \frac{\triangle\,\text{ಖಅಹ}}{\triangle\,\text{ಖಹಬ}}$ (ಪ್ರ. ೬೯).

$\frac{\text{ಅಖ}}{\text{ಖಕ}} = \frac{\triangle\,\text{ಖಅಹ}}{\triangle\,\text{ಖಅಕ}}$ (,, ,,).

ಪರಂತು, $\triangle$ ಖಹಬ = $\triangle$ ಖಹಕ (ಒಂದೇ ತಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮಗಳಲ್ಲಿಯ ತ್ರಿಕೋನಗಳು)

$$\therefore \frac{\triangle \text{ಖಅಹ}}{\triangle \text{ಖಹಬ}} = \frac{\triangle \text{ಖಅಹ}}{\triangle \text{ಖಹಕ}}$$

$$\therefore \frac{\text{ಅಹ}}{\text{ಹಬ}} = \frac{\text{ಅಖ}}{\text{ಖಕ}}.$$

[೨] **ಪಕ್ಷ:**—**ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದ **ಅಬ, ಅಕ** ಭುಜಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಅವುಗಳನ್ನು ಬೆಳಿಸಿದಾಗ ಅವನ್ನು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಹ** ಮತ್ತು **ಖ** ಗಳಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವದು; ಮತ್ತು **ಅಹ : ಹಬ = ಅಖ : ಖಕ.**

ಸಾಧ್ಯ :— ಹಖ || ಬಕ.

ರಚನೆ:— ಕಹ, ಬಖ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ :— $\frac{\text{ಅಹ}}{\text{ಹಬ}} = \frac{\triangle \text{ಖಅಹ}}{\triangle \text{ಖಅಬ}}$ (ಪ್ರ. ೭೯)

$\frac{\text{ಅಖ}}{\text{ಖಕ}} = \frac{\triangle \text{ಖಅಹ}}{\triangle \text{ಖಹಕ}}$ (,,)

ಪರಂತು, $\frac{\text{ಅಹ}}{\text{ಹಬ}} = \frac{\text{ಅಖ}}{\text{ಖಕ}}$ (ಪಕ್ಷ)

$$\therefore \frac{\triangle \text{ಖಅಹ}}{\triangle \text{ಖಹಬ}} = \frac{\triangle \text{ಖಅಹ}}{\triangle \text{ಖಹಕ}}$$

$$\therefore \triangle \text{ಖಹಬ} = \triangle \text{ಖಹಕ}$$

ಪರಂತು, ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ **ಹಖ** ಇದೊಂದೇ ತಳರೇಖೆಯಾಗಿರುವದು.

∴ ಅವು ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ ಇರುವವು.

ಅಂದರೆ, **ಹಖ || ಬಕ.**

ಉಪ ಸಿ. ೧ :—ಹಖ || ಬಕ ಇದ್ದರೆ,

ಅಹ : ಅಬ = ಅಖ : ಅಕ, ಮತ್ತು

ಹಬ : ಅಬ = ಖಕ : ಅಕ.

ಉಪ ಸಿ. ೨ :—ಅಹ : ಅಬ = ಅಖ : ಅಕ ಇದ್ದರೆ,

ಹಖ || ಬಕ.

ಎರಡನೆಯ ಸಿದ್ಧತೆಯ ರೂಪರೇಷೆಯು :— ಅಹ, ಹಬ ಇವು ಪರಿಚ್ಛೇದನಶೀಲ ಇರುವವೆಂದು ತಿಳಿದು, ಅವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು **ಮ : ನ** ಇರುವದೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿರಿ; **ಮ, ನ** ಇವು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿರುವವು. **ಅಹ** ದಲ್ಲಿ **ಮ** ದಿಂದ ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನೂ, **ಹಬ** ದಲ್ಲಿ **ನ** ದಿಂದ ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನೂ ಮಾಡಿರಿ. ಅಂದರೆ **ಅಹ** ದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವು **ಹಬ** ದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗುವದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ **ಬಕ** ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಈ ರೇಷೆಗಳಿಂದ **ಅಖ** ದಲ್ಲಿ **ಮ** ಸಮಾನ ಭಾಗ, ಮತ್ತು **ಬಖ** ದಲ್ಲಿ **ನ** ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗುವವು. ಹಾಗೂ ಈ ವಿಭಾಗಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು;

ಆದ್ದರಿಂದ **ಅಖ : ಖಕ = ಮ : ನ ;**

ಪರಂತು **ಅಹ : ಹಬ = ಮ : ನ**

$\therefore$ **ಅಹ : ಹಬ = ಅಖ : ಖಕ.**

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೫.

೧. ಎರಡು ಸರಳ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳು ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಸಂಗತ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[**ಅಬ, ಕಡ** ಸರಳ ರೇಷೆಗಳಿಗೆ **ಪಫ, ರಸ, ಕ್ಷಯ** ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳು ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ. **ಅಬ** ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ **ಫಲಮ** ರೇಷೆಯು **ರಸ** ಕ್ಕೆ **ಲ** ದಲ್ಲಿ, ಮತ್ತು **ಕ್ಷಯ** ಕ್ಕೆ **ಮ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{\text{ಪರ}}{\text{ರಕ್ಷ}} = \frac{\text{ಫಲ}}{\text{ಲಮ}} = \frac{\text{ಫಸ}}{\text{ಸಯ}}$]

೨. ಸಮಲಂಬದ ಕರ್ಣಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದನ್ನು ಒಂದೇ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು.

೩. ಸಮಲಂಬದ ಅಸಮಾಂತರ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ರೇಷೆಯು ಸಮಾಂತರ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವದು.

೪. ಎರಡು ಸಮಕೇಂದ್ರ ವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿ **ಮ** ಇದೊಂದು ಕೇಂದ್ರವಿದೆ. **ಮಅಕ** ಮತ್ತು **ಮಬಡ** ರೇಷೆಗಳು ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ತುಳವನ್ನು **ಅ** ಮತ್ತು

ಖ ಗಳಲ್ಲಿ, ಹಾಗೂ ಎರಡನೆಯು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಕ ಮತ್ತು ಡ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ ಅಬ || ಕಡ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. △ ಅಬಕ ದ ಅಡ, ಬಈ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಗ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಗಖ || ಡಈ ಮತ್ತು ಗಖ ರೇಖೆಯು ಅಕ ಕ್ಕೆ ಖ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ಅಕ = ೬ ಈಖ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೬. ಪ್ರಮೇಯ ೭೨ರ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬಖ, ಕಹ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಮ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

(೧) △ ಅಹಮ = △ ಅಖಮ

(೨) ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಬೆಳಸಿದ ಅಮ ರೇಖೆಯು ಬಕ ವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದು.

(೩) ಹಖ : ಬಕ = ಅಹ : ಅಬ = ಅಖ : ಅಕ.

[ಅಕ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಹಲ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ' ಅದು ಬಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಲ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.]

೭. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಅ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅಂತಃಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು. ಅಪಫ ರೇಖೆಯು ಆ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಪ ಮತ್ತು ಫ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಅಪ : ಅಫ ಗುಣೋತ್ತರವು ವರ್ತುಳಗಳ, ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೮. △ ಅಬಕ ದ ಬಕ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಪ ಇದೊಂದು ಬಿಂದುವಿದೆ. ಪಫ, ಪರ ರೇಖೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಅ, ಬಅ ಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ಇದ್ದು, ಅಬ ಕ್ಕೆ ಫ ದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅಕ ಕ್ಕೆ ರ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ ಫರ ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೯. △ ಅಬಕ ದ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಅಡ, ಬಈ, ಕಫ ರೇಖೆಗಳು ಬಕ, ಅಕ, ಅಡ ಭುಜಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಡ, ಈ, ಫ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ,

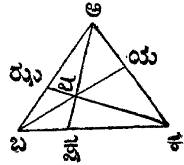
$$\frac{\text{ಪಡ}}{\text{ಅಡ}} + \frac{\text{ಪಈ}}{\text{ಬಈ}} + \frac{\text{ಪಫ}}{\text{ಕಫ}} = ೧, \quad \text{ಮತ್ತು}$$

$$\frac{\text{ಅಪ}}{\text{ಅಡ}} + \frac{\text{ಬಪ}}{\text{ಬಈ}} + \frac{\text{ಕಪ}}{\text{ಕಫ}} = ೨, \quad \text{ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.}$$

೧೦. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವದೊಂದು ತಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ, ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಪಫ || ಬಅ ಮತ್ತು ಪಫ ಇದು ಕಅ ಕ್ಕೆ ಫ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು, ಹಾಗೂ ಪರ ರೇಖೆಯು ಕಅ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇದ್ದು ಅಬ ಕ್ಕೆ ರ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ △ ಪಫರ ಇದು △ ಬರಪ ಮತ್ತು △ ಪಫಕ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣಪದವಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೧. ಬಕ ದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಕ್ಷ ಬಿಂದುವನ್ನೂ, ಅಕ್ಷ ದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ವ ಬಿಂದುವನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, △ ಅವಬ : △ ಅವಕ = ಬಕ್ಷ : ಕ್ಷಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೨. △ ಅಬಕ ದ ಕೋನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ, ಅದರಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಬಂದು ಕೂಡುವಂತೆ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಬೆಳಿಸಿದರೆ, ಅವು ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಷ, ಯ, ಝ ಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು.



ಆದರೆ, $\frac{\text{ಬಕ್ಷ}}{\text{ಕ್ಷಕ}} = \frac{\text{ಕಯ}}{\text{ಯಅ}} = \frac{\text{ಅಝ}}{\text{ಝಬ}} = ೧.$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[ಇದಕ್ಕೆ 'ಸೀವ್ಹಾ'ನ ಪ್ರಮೇಯವೆಂದೆನ್ನುವರು. ಮೇಲಿನ ಉದಾ. ೧೧ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಇದನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.]

ಕೃತ್ಯ ೩೧.

ಕೊಟ್ಟ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ, ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಯ ಭಾಗಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಆ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದು.

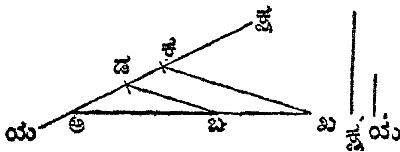
ಪಕ್ಷ :— **ಅಬ** ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ಸರಳ ರೇಖೆಯಿದೆ. ಕೊಟ್ಟ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ **ಕ್ಷ**′, **ಯ**′ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿವೆ.

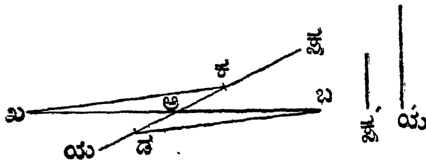
ಸಾಧ್ಯ (೧): **ಅಪ : ಪಬ = ಕ್ಷ′ : ಯ′** ಆಗುವಂತೆ **ಅಬ**ದಲ್ಲಿ **ಯ** ಅಂತಚ್ಛೇದ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

(೨) **ಅಖ : ಖಬ = ಕ್ಷ′ : ಯ′** ಆಗುವಂತೆ, **ಅಬ** ಬೆಳಿಸಿ, **ಖ** ಬಹಿಚ್ಛೇದ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ (೧): **ಅಬ**ಕ್ಕೆ ಯಾವದೊಂದು ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ, ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಅಕ, ಕಡ** ರೇಖೆಗಳನ್ನು **ಕ್ಷ′, ಯ′**ಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ತೆಗೆಯಿರಿ; **ಡಬ** ಕೂಡಿಸಿರಿ, ಅದಕ್ಕೆ **ಕ**ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯು **ಅಬ**ಕ್ಕೆ **ಪ**ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಪ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಅಂತಚ್ಛೇದ ಬಿಂದು ಆಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ (೧): $\frac{\text{ಅಪ}}{\text{ಪಬ}} = \frac{\text{ಅಕ}}{\text{ಕಡ}}$ (ಪ್ರಮೇಯ ೭೨) $= \frac{\text{ಕ್ಷ}'}{\text{ಯ}'}$, (ರಚನೆ)



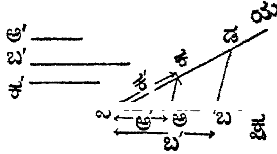


ರಚನೆ (೨): ಅ ದಿಂದ **ಯಅಕ್ಷ** ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಕ್ಷ** ದಲ್ಲಿ **ಕ್ಷ'** ದಷ್ಟು **ಅಕ** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ, ಮತ್ತು **ಕಯ** ದಲ್ಲಿ **ಯ'** ದಷ್ಟು **ಕಡ** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಡಬ** ಕೂಡಿಸಿರಿ, ಮತ್ತು **ಕ** ದಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಬೆಳಿಸಿದ **ಅಬ** ಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲವೆ ಬೆಳಿಸಿದ **ಬಅ** ಕ್ಕೆ **ಖ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಖ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಬಹಿಚ್ಛೇದ ಬಿಂದು ಆಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ (೨): $\frac{\text{ಅಖ}}{\text{ಖಬ}} = \frac{\text{ಅಕ}}{\text{ಕಡ}}$ (ಪ್ರಮೇಯ ೭೨) $= \frac{\text{ಕ್ಷ}'}{\text{ಯ}'}$, (ರಚನೆ)

ಕೃತ್ಯ ೩೨.

ಕೊಟ್ಟ ಮೂರು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ಚತುರ್ಥ ಪ್ರಮಾಣ ಪದ ತೆಗೆಯುವದು.



ಪಕ್ಷ :— ಅ′, ಬ′, ಕ′ ಕೊಟ್ಟ ಮೂರು ರೇಖೆಗಳಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ :— ಅ′ : ಬ′ = ಕ′ : ಡ′ ಆಗುವಂತೆ ಡ′ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ :— **ವಕ್ಷ, ವಯ** ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಯಾವದೊಂದು ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ವಕ್ಷ**ದಲ್ಲಿ ಅ′ ದಷ್ಟು **ವಅ** ರೇಖೆಯನ್ನೂ, ಬ′ ದಷ್ಟು **ವಬ** ರೇಖೆಯನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ವಯ** ದಲ್ಲಿ **ಕ** ದಷ್ಟು **ವಕ** ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಅಕ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. **ಬ** ದಿಂದ **ಅಕ**ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ವಯ**ಕ್ಕೆ **ಡ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಅಂದರೆ **ವಡ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಉದ್ದಳತೆಯ ರೇಖೆಯಾಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— **ವಅ : ವಬ = ವಕ : ವಡ** (ಪ್ರಮೇಯ ೭೨)

∴ **ಅ′ : ಬ′ = ಕ : ವಡ**

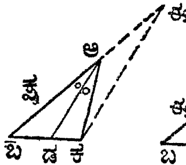
∴ **ವಡ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಚತುರ್ಥ ಪ್ರಮಾಣಪದ ಇರುವದು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ :— ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ತೃತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಪದ ತೆಗೆಯುವದು.

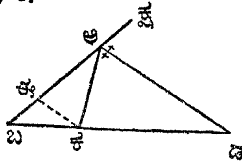
ಮೇಲಿನ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಕ′ = ಬ′ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

*ಪ್ರಮೇಯ ೭೩.

ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಕೋನದ (ಅಂತರ್ ಇಲ್ಲವೆ ಬಹಿರ್) ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಎದುರಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ (ಅಂತಚ್ಛೇದದಿಂದ ಇಲ್ಲವೆ ಬಹಿಚ್ಛೇದದಿಂದ) ವಿಭಾಗಿಸಿ ಉಂಟಾದ ಭಾಗಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು, ತ್ರಿಕೋನದ ಆ ಮೇಲಿನ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವ ಭುಜಗಳ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುವದು.



ಆ. ೧



ಆ. ೨

ಪಕ್ಷ:— ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯ ∠ ಅದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು (ಆ. ೧ ರಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ ಮತ್ತು ಆ. ೨ ರಲ್ಲಿ ಬಹಿರ್) ಬಕ ಕ್ಕೆ ಅಥವಾ ಬೆಳಿಸಿದ ಬಕ ಕ್ಕೆ ಡ ದಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವದು.

ಸಾಧ್ಯ:— ಬಡ : ಡಕ = ಅಬ : ಅಕ ಎಂದು ತೋರಿಸುವದು.

ರಚನೆ:— ಕ ದಿಂದ ಡಅ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಬಅ ಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲವೆ ಬೆಳಿಸಿದ ಬಅ ಕ್ಕೆ ಈ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಬೆಳಿಸಿದ ಈಅ ದಲ್ಲಿ ಕ್ಷ ಇದೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ∠ ಕ್ಷಅಡ = ∠ ಅಈಕ (ಅಡ ∥ ಈಕ).
∠ ಡಅಕ = ∠ ಅಕಈ (,, ,,).

*ಈ ಪ್ರಮೇಯವು ಎಸ್. ಎಸ್. ಸಿ. ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇರುವದಿಲ್ಲ.

ಪರಂತು ∠ **ಕ್ಷಅಡ** = ∠ **ಡಅಕ** (ಅಡ ಇದು ∠ ಅ ದ ದ್ವಿಭಾಜಕ).

∴ ∠ **ಅಈಕ** = ∠ **ಅಕಈ**

∴ ∠ **ಅಈ** = ∠ **ಅಕ**

ಇನ್ನು **ಬಡ : ಡಕ = ಬಅ : ಅಈ** (ಪ್ರಮೇಯ ೭೨)

= **ಬಅ : ಅಕ** (**ಅಈ = ಅಕ**)

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ **ವ್ಯತ್ಯಾಸವು** ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇದೆ. ಮೇಲಿನ ಅನುಮಾನ ಪರಂಪರೆಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ, ಇಲ್ಲವೆ ಕ್ರಮವಿರುದ್ಧ ಸಿದ್ಧತೆಯಿಂದ ಇದರ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

"**ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದ **ಬಕ** ಭುಜದಲ್ಲಿಯ **ಡ** ಬಿಂದುವಿನಿಂದ **ಬಡ : ಡಕ = ಅಬ : ಅಕ** ಇದ್ದರೆ, **ಅಡ** ರೇಖೆಯು ∠ **ಬಅಕ** ಇವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದು".

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೬.

೧. ೩, ೫ ಮತ್ತು ೭ ಇಂಚು ಉದ್ದಳತೆಗಳುಳ್ಳ ಭುಜಗಳಿಂದಾದ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಆ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳಿಂದ ಆಗುವ ಭುಜಗಳ ಖಂಡಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೨. △ ಅಬಕದ ∠ ಅ ದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಬಕಕ್ಕೆ ಡ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು; ಬಕಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯು ಅಬಕ್ಕೆ ಹ ದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅಕಕ್ಕೆ ಖ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಬಡ : ಡಕ = ಬಹ : ಕಖ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. △ ಅಬಕದ ∠ ಅ ಕಾಟಕೋನವಿದೆ. ಅಮ, ಅನ ರೇಖೆಗಳು ಅಬಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ, ಬಕ ಇಲ್ಲವೆ ಬೆಳಿಸಿದ ಬಕಕ್ಕೆ ಮ ಮತ್ತು ನ ಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು. ಆದರೆ ಬಮ : ಬನ = ಮಕ : ಕನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. △ ಅಬಕದಲ್ಲಿಯ ∠ ಕ ದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಅಬಕ್ಕೆ ಫ ದಲ್ಲಿಯೂ, ∠ ಬ ದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಕಫಕ್ಕೆ ಯ ದಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ ಅಕ : ಕಯ = ಅಫ : ಫಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. △ಅಬಕ ದಲ್ಲಿಯ ಬಕ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಡ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆ. ∠ಅಡಕ ದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಅಕ ಕ್ಕೆ ಮ ದಲ್ಲಿಯೂ, ∠ಅಡಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಅಬಕ್ಕೆ ನದಲ್ಲಿಯೂ ಕೂಡುವವು. ಆದರೆ ಮನ || ಬಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೬. △ಅಬಕ ದಲ್ಲಿಯ ∠ಅ ದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಬಕ ಕ್ಕೆ ಡ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ⊙ಬಅಡ ಇದು ಕಅ ಕ್ಕೆ ಪುನಃ ಹ ದಲ್ಲಿಯೂ, ⊙ಕಅಡ ಇದು ಬಅ ಕ್ಕೆ ಪುನಃ ಖ ದಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ ಬಖ = ಕಹ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೭. △ಅಬಕ ದಲ್ಲಿಯ ∠ಅ ದ ಅಂತರ್ದ್ವಿಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಬಹಿರ್ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇವು ಬಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಡ ಮತ್ತು ಡ′ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಬಕ ದಲ್ಲಿ ಮ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ. ಅಬ > ಅಕ ಇದ್ದರೆ,

(೧) ಬಡ = ಬಕ.ಅಬ / (ಅಕ + ಅಬ);
ಕಡ = ಬಕ.ಅಕ / (ಅಕ + ಅಬ).

(೨) ಬಡ′ = ಬಕ.ಅಬ / (ಅಬ − ಅಕ);
ಕಡ′ = ಬಕ.ಅಕ / (ಅಬ − ಅಕ).

(೩) ಡಡ′ = ೨ಬಕ.ಕಅ.ಅಬ / (ಅಬ^{೨} − ಅಕ^{೨}).

(೪) ಮಡ = ಬಕ (ಅಬ − ಅಕ) / ೨(ಅಬ + ಅಕ);
ಮಡ′ = ಬಕ (ಅಬ + ಅಕ) / ೨(ಅಬ − ಅಕ).

(೫) ಮಡ.ಮಡ′ = $\frac{೧}{೪}$ ಬಕ^{೨}.
ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೮. △ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ ಯ ಇದು ಅಂತರ್ಮಧ್ಯವಿದೆ. ಅಯ ರೇಖೆಯು ಬಕ ಕ್ಕೆ ಡ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ, ಅಯ : ಅಡ = (ಅಕ+ಅಬ) : (ಬಕ+ಕಅ+ಅಬ) ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

*೯. △ಅಬಕ ಇದರ ಬಕ ತಳರೇಖೆಯನ್ನೂ, ಅಬ : ಅಕ ಗುಣೋತ್ತರ ವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಅ ಬಿಂದುವು ಒಂದು ನಿಯತ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

*೧೦. ಬಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟದ್ದೊಂದು ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ, ಡ ದಿಂದ

ಅಂತಚ್ಛೇದವನ್ನೂ ಡ' ದಿಂದ ಬಹಿಚ್ಛೇದವನ್ನೂ ಮಾಡಿರಿ. ಡಡ' ವ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಆ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮತ್ತು ಅಬ : ಅಕ = ಕೊಟ್ಟ ಗುಣೋತ್ತರ, ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೯ನೆಯ, ೧೦ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಮಹತ್ವದ ಪ್ರಮೇಯವು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದು:—

"ಎರಡು ನಿಯತ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಯಾವದೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಂತರದ ಗುಣೋತ್ತರವು ನಿಯತವಾಗಿರುವದೋ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವು ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿರುವದು."

(ಈ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅಪೋಲೊನಿಯುಸನ ವರ್ತುಳವೆನ್ನುವರು.)

೩೨ ನೆಯ ಪರಿಚ್ಛೇದ

ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :—ಎರಡು ಬಹುಭುಜ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದರ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ, ಆ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ **ಮಿಥಃಸಮಕೋನ** (equiangular) ಎನ್ನುವರು.

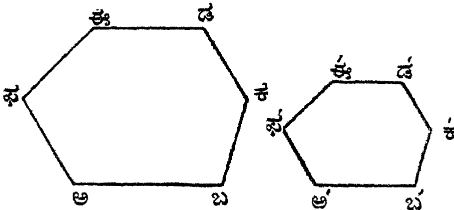
ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದರ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಿದ್ದರೆ ಅವೆರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮಿಥಃಸಮ ಕೋನ ಇರುವವು. ಯಾಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಮೂರನೆಯ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನ ಇರುವವು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :—ಎರಡು ಬಹುಭುಜ ಆಕೃತಿಗಳು (೧) ಮಿಥಃಸಮಕೋನ ಇದ್ದರೆ, ಮತ್ತು (೨) ಅವುಗಳ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಭೂತ ಮಾಡುವ ಭುಜಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ **ಸರೂಪ** (Similar) ಅನ್ನುವರು.

ಉದಾ:—ಕೆಳಗಿನ **ಅಬಕಡಈಫ, ಅ′ಬ′ಕ′ಡ′ಈ′ಫ′** ಇವೆರಡು ಬಹುಕೋನಗಳು ಸರೂಪವಾಗಿರುವವು. ಯಾಕೆಂದರೆ,

(೧) $\angle$ ಅ $=\angle$ ಅ′, $\angle$ ಬ $=\angle$ ಬ′............ $\angle$ ಫ $=\angle$ ಫ′; ಮತ್ತು

(೨) $\dfrac{\text{ಅಬ}}{\text{ಅ}'\text{ಬ}'}=\dfrac{\text{ಬಕ}}{\text{ಬ}'\text{ಕ}'}$ .... $=\dfrac{\text{ಫಅ}}{\text{ಫ}'\text{ಅ}'}$.



ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ $\angle$ ಅ ಮತ್ತು $\angle$ ಅ′ ಇವುಗಳಿಗೆ **ಸದೃಶ**

ಅಥವಾ **ಸಂಗತ** (corresponding) ಕೋನ ಅನ್ನುವರು. ∠ಬ, ∠ಬ′; ∠ಕ, ∠ಕ′ ಮೊದಲಾದವು ಸಂಗತ ಕೋನಗಳ ಜೋಡು ಇರುವವು.

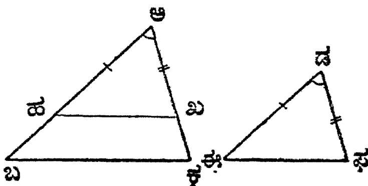
ಅದರಂತೆ **ಅಬ, ಅ′ಬ′; ಬಕ, ಬ′ಕ′** ಮೊದಲಾದವು ಸಪ್ರಶ ಇಲ್ಲವೆ ತತ್ಸಮ ಭುಜಗಳ ಜೋಡು ಇರುವವು.

ಸರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳ **ನೋಟವು** (shape) ಸರಿಯಾಗಿರುವದು, ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಆಕಾರಮಾನಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುವವೆಂಬವನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಿರಿ. ಮ್ಯಾಜಿಕ ಲ್ಯಾಂಟರ್ನದಿಂದ ಪರದೆಯ ಮೇಲೆ ಕಾಣುವ ಚಿತ್ರಗಳು, ಮತ್ತು ಮೂಲ ಗಾಜುಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳು ಸರೂಪವಾಗಿರುವವು. ಅದರಂತೆ ಒಂದೇ ವಸ್ತುವಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ತೆಗೆದ ಆಕೃತಿಗಳೂ ಸರೂಪವಾಗಿರುವವು.

ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪವಾಗಿರಲಿಕ್ಕೆ ಯಾವ ಯಾವ ಸಂಗತಿಗಳ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇರಬೇಕೆಂಬ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಇದೇ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪ್ರಮೇಯಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ ೭೪.

ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮಿಥಃಸಮಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ತತ್ಸಮ ಭುಜಗಳು ಯಾವದೊಂದು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವವು.



ಪಕ್ಷ :— ಅಬಕ, ಡಈಫ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,
∠ಅ = ∠ಡ, ∠ಬ = ∠ಈ, ∠ಕ = ∠ಫ.

ಸಾಧ್ಯ :— $\frac{\text{ಅಬ}}{\text{ಡಈ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಈಫ}} = \frac{\text{ಕಅ}}{\text{ಫಡ}}$.

ರಚನೆ:— ಅಬದಲ್ಲಿ ಡಈದಷ್ಟು ಅಹ ಮಾಡಿರಿ;
ಅಕದಲ್ಲಿ ಡಫದಷ್ಟು ಅಖ ಮಾಡಿರಿ.
ಹಖ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ಅಹಖ, ಡಈಫ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

ಅಹ = ಡಈ (ರಚನೆ)
ಅಖ = ಡಫ (,,)
$\angle$ ಅ = $\angle$ ಡ (ಪಕ್ಷ)

∴ ಇವೆರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇವೆ (ಎರಡು ಭುಜ, ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಕೋನ)

∴ $\angle$ ಅಹಖ = $\angle$ ಡಈಫ;

ಪರಂತು $\angle$ ಡಈಫ = $\angle$ ಬ (ಪಕ್ಷ)
∴ ಅಹಖ = $\angle$ ಬ.
∴ ಹಖ ∥ ಬಕ (ಸಂಗತಕೋನ)
∴ ಅಬ : ಅಹ = ಅಕ : ಅಖ (ಪ್ರ. ೭೨)

ಪರಂತು ಅಹ = ಡಈ ಮತ್ತು ಅಖ = ಡಫ (ರಚನೆ)
∴ ಅಬ : ಡಈ = ಅಕ : ಡಫ

ಇದರಂತೆ ಬಅ, ಬಕ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಈಡ, ಈಫ ಗಳಷ್ಟು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅಬ : ಡಈ = ಬಕ : ಈಫ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \frac{\text{ಅಬ}}{\text{ಡಈ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಈಫ}} = \frac{\text{ಅಕ}}{\text{ಡಫ}}.$$

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೧ :— ಮಿಥಃಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪವಾಗಿರುವವು.

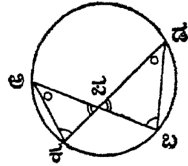
ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೨ :— ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮಾಂತರ ಇದ್ದರೆ, ಅವೆರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪವಾಗಿರುವವು.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ ೩ :—ಎರಡು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರಲ್ಲಿಯ ಲಘುಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದರಲ್ಲಿಯ ಲಘುಕೋನದಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ, ಆವೆರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪವಾಗಿರುವವು.

ಈ ಪ್ರಮೇಯ ೬೪, ೬೫, ೬೬ ಇವುಗಳ ಬೇರೆ ಪ್ರಕಾರದ ಸಿದ್ಧತೆಗಳನ್ನು ೭೪ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಆಧಾರದಿಂದ ಮಾಡಬಹುದು:—

೬೪ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆ

ಪಕ್ಷ :— ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ **ಅಬ, ಕಡ** ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು.



ಸಾಧ್ಯ :— ಅಪ · ಪಬ = ಕಪ · ಪಡ

ರಚನೆ :— ಅಕ, ಬಡ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ :— **ಅಪಕ, ಡಪಬ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ.

∠ **ಅ** = ∠ **ಡ** (ಒಂದೇ ವರ್ತುಳಖಂಡ ಕೋನಗಳು)

∠ **ಕ** = ∠ **ಬ** (,, ,, ,,)

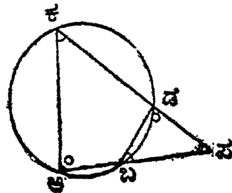
∠ **ಅಪಕ** = ∠ **ಬಪಡ** (ವಿರುದ್ಧಕೋನ).

∴ ಇವೆರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮಿಥಃಸಮಕೋನ ಇರುವವು; ಮತ್ತು ಸರೂಪ ಇರುವವು.

$\therefore \frac{\text{ಅಪ}}{\text{ಪಡ}} = \frac{\text{ಕಪ}}{\text{ಪಬ}}$. ∴ **ಅಪ · ಪಬ = ಕಪ · ಪಡ.**

೬೫ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆ

ಪಕ್ಷ :— ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ **ಅಬ, ಕಡ** ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಬೆಳಿಸಲಾಗಿ, ಅವು ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ **ಪ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು.



ಸಾಧ್ಯ :— ಪಅ · ಪಬ = ಪಕ · ಪಡ.

ರಚನೆ :— ಅಕ, ಬಡ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ಅಪಕ, ಡಪಬ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

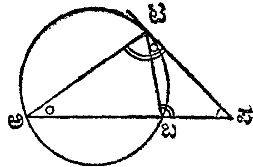
∠ಅ = ∠ಡ (ಪ್ರಮೇಯ ೫೨ ರ ಉಪಸಿ.)
∠ಬ = ∠ಕ (,, ,, ,,)
∠ಪ = ∠ಪ (ಸಾಧಾರಣ).

∴ ತ್ರಿಕೋನ ಸಮಕೋನ ಇರುವದರಿಂದ ಸರೂಪವಾಗಿರುವವು.

∴ $\frac{ಪಅ}{ಪಡ} = \frac{ಪಕ}{ಪಬ}$ ∴ ಪಅ · ಪಬ = ಪಕ · ಪಡ.

೬೬ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆ

ಪಕ್ಷ :— ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ ಪ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪಬಅ ಛೇದಕ ರೇಷೆಯನ್ನೂ, ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಟ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಪಟ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಷೆಯನ್ನೂ ತೆಗೆದಿವೆ.



ಸಾಧ್ಯ :— ಪಟ^{2} = ಪಅ · ಪಬ.

ರಚನೆ :— ಟಅ, ಟಬ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ :— ಪಅಟ, ಪಟಬ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

∠ಪಅಟ = ∠ಪಟಬ (ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ವ. ಖಂಡಗಳ ಕೋ.)
∠ಟಪಅ = ∠ಬಪಟ
∠ಪಟಅ = ∠ಪಬಟ (ಮೂರನೆಯ ಕೋನಗಳು.)

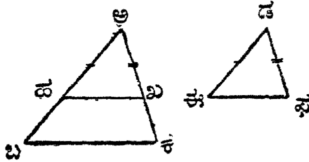
∴ ಇವು ಮಿಥಃಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿರುವದರಿಂದ ಸರೂಪವಾಗಿರುವವು.

∴ $\frac{ಪಟ}{ಪಬ} = \frac{ಪಅ}{ಪಟ}$.

∴ ಪಟ^{2} = ಪಅ · ಪಬ.

೭೫ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯ.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಭುಜಗಳು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರೂ ಭುಜಗಳ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅವೆರಡು ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಮಿಥಃಸಮಕೋಣಗಳಿರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— ಅಬಕ, ಡಈಫ ತ್ರಿಕೋಣಗಳಲ್ಲಿ,

$$\frac{\text{ಅಬ}}{\text{ಡಈ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಈಫ}} = \frac{\text{ಕಅ}}{\text{ಫಡ}}.$$

ಸಾಧ್ಯ:— $\angle$ ಅ = $\angle$ ಡ, $\angle$ ಬ = $\angle$ ಈ, $\angle$ ಕ = $\angle$ ಫ.

ರಚನೆ:— ಅಬ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಡಈಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಅಹ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಅಕ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಡಫಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಅಖ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಹಖ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— $\frac{\text{ಅಬ}}{\text{ಡಈ}} = \frac{\text{ಅಕ}}{\text{ಡಫ}}$ (ಪಕ್ಷ)

ಪರಂತು ಡಈ = ಅಹ ಮತ್ತು ಡಫ = ಅಖ (ರಚನೆ)

$\therefore \frac{\text{ಅಬ}}{\text{ಅಹ}} = \frac{\text{ಅಕ}}{\text{ಅಖ}}$

$\therefore$ ಹಖ || ಬಕ (ಪ್ರಮೇಯ ೭೨)

$\therefore$ $\angle$ ಅಬಕ = $\angle$ ಅಹಖ ಮತ್ತು $\angle$ ಅಕಬ = $\angle$ ಅಖಹ

∴ **ಅಬಕ, ಅಹಖ** ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮಿಥಃಸಮಕೋನಗಳಿರುವವು.

∴ ಅವುಗಳ ತತ್ಸಮ ಭುಜಗಳು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವವು.

ಅಂದರೆ $\frac{\text{ಅಬ}}{\text{ಅಹ}} = \frac{\text{ಅಕ}}{\text{ಅಖ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಹಖ}}$

ಅಂದರೆ $\frac{\text{ಅಬ}}{\text{ಡಈ}} = \frac{\text{ಅಕ}}{\text{ಡಫ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಹಖ}}$

ಪರಂತು $\frac{\text{ಅಬ}}{\text{ಡಈ}} = \frac{\text{ಅಕ}}{\text{ಡಫ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಈಫ}}$ (ಪಕ್ಷ)

∴ **ಹಖ = ಈಫ**

ಇನ್ನು **ಅಹಖ, ಡಈಫ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

ಅಹ = ಡಈ (ರಚನೆ)
ಅಖ = ಡಫ (,,)
ಹಖ = ಈಫ (ಸಿದ್ಧ)

∴ ಇವೆರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇವೆ.

∴ ∠ **ಅ** = ∠ **ಡ**, ∠ **ಅಹಖ** = ∠ **ಈ**, ∠ **ಅಖಹ** = ∠ **ಫ**

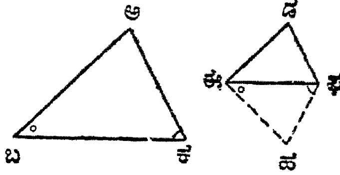
ಪರಂತು ∠ **ಅಹಖ** = ∠ **ಬ**, ∠ **ಅಖಹ** = ∠ **ಕ** (ಸಿದ್ಧ)

∴ ∠ **ಅ** = ∠ **ಡ**, ∠ **ಬ** = ∠ **ಈ**, ∠ **ಕ** = ∠ **ಫ**.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ :— ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳು ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿರುವವೋ, ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪ ಇರುವವು.

ಟಿಪ್ಪಣೆ:— ಮೇಲಿನ ಸಿದ್ಧತೆಯ ರಚನೆಯು ೭೪ ಮತ್ತು ೭೬ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ರಚನೆಯಂತಿದೆ. ಮುಂದಿನ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ರೀತಿಯ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ಆಕೃತಿಯು ತತ್ಸಮ ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳಂತಿರುವದು.

೭೫ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಇನ್ನೊಂದು ಸಿದ್ಧತೆಯು



ರಚನೆ:— **ಡ** ಕೋನದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ **ಈಫ**ದ ಕೆಳಬದಿಗೆ ∠ **ಹಈಫ** ಇದನ್ನು ∠ **ಬ**ದಷ್ಟು, ಮತ್ತು ∠ **ಹಫಈ** ಇದನ್ನು ∠ **ಕ** ದಷ್ಟು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ರಚನೆಯಂತೆ **ಹಈಫ** ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೂರನೆಯ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.

ಅಂದರೆ **ಅಬಕ, ಹಈಫ** ಇವು ಮಿಥಃ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಇರುವವು.

$$\therefore \frac{\text{ಅಬ}}{\text{ಹಈ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಈಫ}} = \frac{\text{ಕಅ}}{\text{ಹಫ}}$$

ಪರಂತು $\frac{\text{ಅಬ}}{\text{ಡಈ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಈಫ}} = \frac{\text{ಕಅ}}{\text{ಡಫ}}$ (ಪಕ್ಷ)

∴ **ಹಈ** = **ಡಈ** ಮತ್ತು **ಹಫ** = **ಡಫ**

ಇನ್ನು **ಡಈಫ, ಹಈಫ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

ಡಈ = **ಹಈ** (ಸಿದ್ಧ)
ಡಫ = **ಹಫ** (,,)
ಈಫ = **ಈಫ** (ಸಾಧಾರಣ)

ಆದ್ದರಿಂದ ಇವು ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳು (ಮೂರು ಭುಜ)

∴ ∠ಡ=∠ಹ, ∠ಡಈಫ=∠ಹಈಫ, ∠ಡಫಈ=∠ಹಫಈ

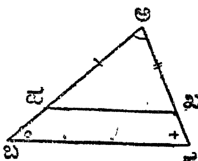
ಪರಂತು ∠ಹ=∠ಅ, ∠ಹಈಫ=∠ಬ, ∠ಹಫಈ=∠ಕ;

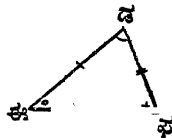
∴ ∠ಡ=∠ಅ, ∠ಡಈಫ=∠ಬ, ∠ಡಫಈ=ಕ.

---

೭೬ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯ.

ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಒಂದು ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದರ ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿದ್ದು ಆ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾವಿಷ್ಟವಿರುವ ಭುಜಗಳು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅವೆರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪ ಇರುವವು.





ಪಕ್ಷ:— ಅಬಕ, ಡಈಫ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ∠ಅ=∠ಡ ಮತ್ತು ಅಬ : ಡಈ = ಅಕ : ಡಫ.

ಸಾಧ್ಯ:— ಅಬಕ, ಡಈಫ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪವಾಗಿರುವವು.

ರಚನೆ:— ಅಬ ವಲ್ಲಿ ಡಈ ಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಅಹ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಅಕ ವಲ್ಲಿ ಡಫ ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಅಖ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಹಖ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ಅಹಖ, ಡಈಫ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

{ ಅಹ = ಡಈ (ರಚನೆ)
ಅಖ = ಡಫ (,,)
∠ ಅ = ∠ ಡ (ಪಕ್ಷ)

∴ ಇವೆರಡು ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳು. (ಎರಡು ಭುಜ, ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಕೋನ)

∴ ∠ ಅಹಖ = ∠ ಈ ಮತ್ತು ∠ ಅಖಹ = ∠ ಫ.

ಇನ್ನು ಅಬ : ಡಈ = ಅಕ : ಡಫ (ಪಕ್ಷ)

ಪರಂತು ಡಈ = ಅಹ, ಡಫ = ಅಖ (ರಚನೆ)

∴ ಅಬ : ಅಹ = ಅಕ : ಅಖ

∴ ಹಖ ರೇಖೆಯು ಬಕ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರ ಇರುವದು (ಪ್ರಮೇಯ ೭೨).

∴ ∠ ಅಹಖ = ∠ ಬ ಮತ್ತು ∠ ಅಖಹ = ∠ ಕ.

ಪರಂತು ∠ ಅಹಖ = ∠ ಈ ಮತ್ತು ∠ ಅಖಹ = ಫ (ಸಿದ್ಧ)

∴ ∠ ಬ = ∠ ಈ ಮತ್ತು ∠ ಕ = ∠ ಫ

∴ ಅಬಕ, ಡಈಫ ಇವು ಮಿಥಃ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿರುವವು.

∴ ಅಬಕ, ಡಈಫ ಇವು ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿರುವವು.

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸರೂಪತೆಗೆ ಅವಶ್ಯವಿರುವ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನೂ, ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಏಕರೂಪತೆಗೆ ಅವಶ್ಯವಿರುವ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನೂ ತುಲನೆ ಮಾಡುವದು ಒಳ್ಳೇ ಬೋಧಪ್ರದವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವಿವರಣೆಗಳನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಿರಿ:—

ಸರೂಪತೆ:

(೧) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದರ ಎರಡು ಭುಜಗಳ **ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ** ಮತ್ತು ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳು ಸರಿಯಿರುವವು.

(೨) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದರ ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ** ಇರುವವು.

(೩) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದರ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ **ಸರಿ**ಯಿರುವವು.

ಏಕರೂಪತೆ:

(೧) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದರ ಎರಡು ಭುಜಗಳಿಗೆ **ಸರಿಯಿದ್ದು,** ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು.

(೨) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದರ ಮೂರು ಭುಜಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಸರಿಯಿರುವವು.**

(೩) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದರ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸರಿ **ಮತ್ತು** ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎರಡು ತತ್ಸಮ ಭುಜಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿ ಇರುವವು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೭.

೧. ಮಅ, ಮಬ, ಮಕ ಇವು ಮೂರು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಮಅ ದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಪಫ ⊥ ಮಬ ಮತ್ತು ಪರ ⊥ ಮಕ; ಇದ್ದರೆ ಪಫ : ಪರ ಗುಣೋತ್ತರವು ನಿಯತವಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಮ ಕೇಂದ್ರವೂ, ಅಬ ವ್ಯಾಸವೂ ಇರುವವು. ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಪನ ⊥ ಅಬ. ಪ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು ಬೆಳಿಸಿದ ಅಬ ಕ್ಕೆ ಟ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ, △ ಮನಪ, ಮತ್ತು △ ಮಪಟ ಇವು ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳು, ಮತ್ತು **ಮನ : ಮಪ = ಮಪ : ಮಟ** ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. △ ಅಬಕ ಮತ್ತು △ ಡಈಫ ಇವು ಮಿಥಃ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿರುವವು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕಮ, ಡನ ಎತ್ತರಗಳಾಗಿವೆ. ಆದರೆ **ಅಮ : ಡನ = ಅಬ : ಡಈ** ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಅಬಕ, ಡಈಫ ಮಿಥಃ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ತ, ತ′ ಇವು ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯಗಳೂ, ರ, ರ′ ಇವು ಅಂತಸ್‌ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೂ ಇರುವವು. ಆದರೆ ತ : ತ′ = ಬಕ : ಈಫ = ರ : ರ′ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಅ ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಬಕ ಕ್ಕೆ ಮ ದಲ್ಲಿಯೂ, ಬೆಳಿಸಿದ ಡಕ ಕ್ಕೆ ನ ದಲ್ಲಿಯೂ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ಬಮ . ಡನ ಇದು ನಿಯತ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೬. △ ಅಬಕ ಇದರ ಅಡ ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಇದೊಂದು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಇದೆ. ಬಈ ಬೆಳಿಸಿದರೆ ಅದು ಅಕ ಕ್ಕೆ ಫ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ಅಕ = ೩ ಅಫ ಮತ್ತು ಬಕ = ೪ ಈಫ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[ಡಹ ರೇಖೆಯನ್ನು ಬಫ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಅಕ ಕ್ಕೆ ಹ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.]

೭. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರ ರೇಖೆಯನ್ನು (Line of centres) ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೮. ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿಯ ಸಮಾಂತರ ಇರುವ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಕರ್ಣಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವು ಆ ಕರ್ಣಗಳನ್ನು ೧ : ೨ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಭಾಗ ಮಾಡುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡು ವವು; ಮತ್ತು ಆ ಬಿಂದುವು ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ೧ : ೨ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೯. △ ಅಬಕ ದ ಬಕ ತಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವದೊಂದು ಡ ಬಿಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮತ್ತು ಅಬಡ, ಅಕಡ ವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಅಬ, ಅಕ ಇವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೦. △ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ ಅಡ, ಬಈ, ಕಫ ಎತ್ತರಗಳಿವೆ. ಮತ್ತು ಪ ಇದೊಂದು ಲಂಬ ಸಂಪಾತವಿದೆ. ಅಡ ಬೆಳಿಸಿದರೆ ಅದು ಅಬಕ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಖ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

(೧) △ ಅಈಫ ಮತ್ತು △ ಅಬಕ ಸರೂಪವಾಗಿವೆ.

(೨) △ ಬಪಡ ಮತ್ತು △ ಅಕಡ ಸರೂಪವಾಗಿವೆ.

(೩) ಬಡ · ಡಕ = ಅಡ · ಪಡ.

(೪) ಪಡ = ಡಖ.

೧೧. ವಅ, ವಬ, ವಕ ಇವು ಮೂರು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಲ, ಮ, ನ ಮತ್ತು ಪ, ಫ, ರಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ, ಲಮ : ಮನ = ಪಫ : ಫರ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಕೊಟ್ಟ ಮೂರು ರೇಖೆಗಳ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಪದವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೨. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮಿಥಃ ಸಮಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಳು, ಸಂಗತ ಭುಜಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೧೩. △ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿಯ ∠ ಅ ದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಬಕಕ್ಕೆ ಡ ದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅಬಕ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಈ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

$$ಅಡ^2 = ಅಬ \cdot ಅಕ - ಬಡ \cdot ಡಕ$$

$$= ಅಬ \cdot ಅಕ \left\{ 1 - ಬಕ^2/(ಅಕ+ಅಬ)^2 \right\}$$

[ಅಬಡ, ಅಈಕ ಇವು ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

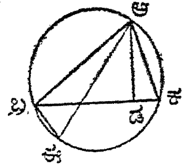
ಅ ಬ ಕ ಡ ಈ

*೧೪. △ ಅಬಕ ಇವರ ತ ಇದೊಂದು ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯವಿದೆ. ಮತ್ತು ಅಡ ⊥ ಬಕ. ಆದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

ಅಬ · ಅಕ = ೨ತ · ಅಡ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ △ ಅಬಕ ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು △ ದಿಂದ ತೋರಿಸಿ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

ಬಕ · ಕಅ · ಅಬ = ೪ತ · △



[ಅಈ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದ್ದರೆ △ ಅಈಬ, △ ಅಕಡ ಇವು ಸರೂಪವಾಗಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

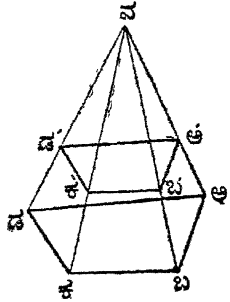
*೧೫. △ ಅಬಕದಲ್ಲಿ ಪ ಇದೊಂದು ಲಂಬಸಂಪಾತವಿದೆ; ಮತ್ತು ಮ ಇದೊಂದು ಪರಿಮಧ್ಯವಿದೆ. ಬಕದಲ್ಲಿ ಲ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ. ಆದರೆ ಮಲ = $\frac{೧}{೨}$ ಅಪ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[ಅಬದಲ್ಲಿ ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮತ್ತು ಅಪಕ, ಲಮನ ಇವು ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.]

ಟಿಪ್ಪಣಿ:— ೧೩, ೧೪, ೧೫ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಹತ್ವದ ಪ್ರಮೇಯಗಳಿರುವವು.

*೧೬. ಕೊಟ್ಟ ಅಬಕಡ ಆಕೃತಿಗೆ ಸರೂಪವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಆಕೃತಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾಗ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

ಆಕೃತಿಯ ಹೊರಗೆ ಇಲ್ಲವೆ ಒಳಗೆ ಎಲ್ಲಿಯಾದರೊಂದು ವ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅ, ಬ, ಕ, ಡ ಇವುಗಳನ್ನು ವಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ವಅ (ಅಥವಾ ಬೆಳೆಸಿದ ವಅ)ದಲ್ಲಿ ಅ′ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅ′ಬ′ ‖ ಅಬ, ಬ′ಕ′ ‖ ಬಕ, ಕ′ಡ′ ‖ ಕಡ ತೆಗೆಯಿರಿ.

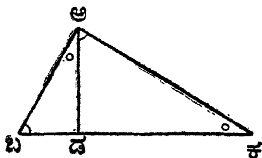


ಡ′ಅ′ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ ಅಬಕಡಕ್ಕೆ ಅ′ಬ′ಕ′ಡ′ ಆಕೃತಿಯು ಸರೂಪ ಆಗುವದು.

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದ ಅ′ಬ′ಕ′ಡ′ ಆಕೃತಿಯು ಅಬಕಡಕ್ಕೆ ಸಮಸ್ಥಿತ (Similarly situated) ಇರುವದು, ಎನ್ನುವರು. ವಅ′ = ವಅ = ೨ : ೩ ಇದ್ದರೆ, ಅ′ಬ′ಕ′ಡ′ದ ಭುಜಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅಬಕಡದ ಭುಜಗಳ $\frac{೨}{೩}$ ದಷ್ಟು ಇರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೭೭ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯ.

ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕಾಟಕೋನದಿಂದ ಅದರ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ತೆಗೆದರೆ, ಆ ಲಂಬದ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮೂಲ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸರೂಪ ವಾಗಿರುವವು; ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರೂಪವಾಗಿರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ∠ಅ ಇದು ಕಾಟಕೋನವಿದ್ದೆ; ಮತ್ತು ಅಡ ⊥ ಬಕ.

ಸಾಧ್ಯ:— ಡಬಅ, ಡಅಕ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸರೂಪವಾಗಿರುವವು; ಮತ್ತು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರೂಪ ಆಗಿರುವವು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ಡಬಅ, ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

∠ಬಡಅ = ∠ಬಅಕ (ಕಾಟಕೋನ)
∠ಡಬಅ = ∠ಅಬಕ (ಒಂದೇ ಕೋನ)
∠ಡಅಬ = ∠ಅಕಬ (ಮೂರನೆಯ ಕೋನ)

∴ ಇವು ಮಿಥಃಸಮಕೋನಗಳಿರುವವು; ಹಾಗೂ ಸರೂಪ ವಾಗಿರುವವು.

ಅದರಂತೆ **ಡಅಕ, ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮಿಥಃಸಮಕೋನ ಮತ್ತು ಸರೂಪ ಆಗಿರುವವು.

∴ **ಡಬಅ, ಡಅಕ** ತ್ರಿಕೋನಗಳೂ ಸರೂಪವಾಗಿವೆ.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ (೧):—ಅಡ^2 = ಬಡ · ಡಕ ಮತ್ತು ಡಬಅ, ಡಅಕ ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಸರೂಪವಾಗಿವೆ.

∴ ಅಡ : ಡಕ = ಬಡ : ಅಡ.

∴ ಅಡ^2 = ಬಡ · ಡಕ.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ (೨):–ಅಬ^2=ಬಕ · ಬಡ ಮತ್ತು ಅಕ^2=ಬಕ · ಕಡ. ಅಬಕ, ಅಬಡ ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಸರೂಪ ಇವೆ.

∴ ಅಬ : ಬಡ = ಬಕ : ಅಬ

∴ ಅಬ^2 = ಬಕ · ಬಡ,

ಅದರಂತೆ ಅಕ^2 = ಬಕ · ಕಡ.

ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತ (೩):–ಬಕ^2=ಅಬ^2+ಅಕ^2 (ಪಾಯಥೊಗೋರಸ ಸಿ.)
ಅಬ^2 = ಬಕ · ಬಡ ಮತ್ತು ಅಕ^2 = ಬಕ · ಕಡ.

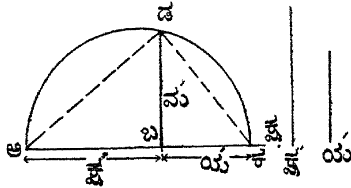
ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿ, ಅಬ^2 + ಅಕ^2 = ಬಕ · ಬಡ + ಬಕ · ಕಡ.
= ಬಕ (ಬಡ + ಕಡ).
= ಬಕ · ಬಕ.
= ಬಕ^2.

ಪಾಯಥೊಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ಈ ಸಿದ್ಧತೆಯು ಸ್ವತಂತ್ರ ಇದೆ. : ಈ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಿದ್ದರೆ, ಮೊದಲು ೭೭ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು¦ಮಾಡಿರಿ: ನಂತರ ಉಪಸಿ. ೨ ಮತ್ತು ೩ ಇವುಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ೭೭ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನೂ ಅದರ ೨ ನೆಯ ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನೂ ಗೃಹೀತ ಎಂದು ಹಿಡಿದು ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಮಾಡಬಾರದು.

---

೩೩ ನೆಯ ಕೃತ್ಯ.

ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣ ಪದವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.



ಪಕ್ಷ :— ಕ್ಷ' ಮತ್ತು ಯ' ಇವೆರಡು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಗಳು.

ಸಾಧ್ಯ :— ಮ'^{2} = ಕ್ಷ' · ಯ' ಆಗುವಂತೆ ಮ' ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ರಚನೆ :— ಯಾವದೊಂದು ಅಕ್ಷ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅದರಲ್ಲಿ ಅಬ ಇದು ಕ್ಷ'ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿಯೂ, ಬಕ ಇದು ಯ'ಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಅಕ ಇದನ್ನು ವ್ಯಾಸವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಅದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಅಕದ ಮೇಲೆ ಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅದು ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಡ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಕೂಡುವದು. ಬಡ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ ಬಡ ಇದು ಮ' ಇಷ್ಟರೇಖೆ ಆಗುವದು.

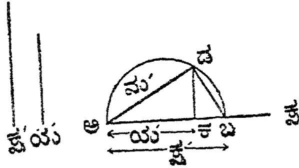
ಸಿದ್ಧತೆ:— ಅಡಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಡ ಇದು ಕಾಟಕೋನ ಇರುವದು; ಯಾಕಂದರೆ ಅದು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು, ಮತ್ತು ರಚನೆಯಂತೆ ಡಬ $\perp$ ಅಕ.

$\therefore$ ಬಡ^2 = ಅಬ · ಬಕ (ಪ್ರಮೇಯ ೭೭ ಉಪಸಿ. ೧.)

$\therefore$ ಬಡ^2 = ಕ್ಷ' · ಯ'

$\therefore$ ಬಡ ರೇಖೆಯು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣಪದ ಇರುವದು.

ಇನ್ನೊಂದು ರಚನೆಯು :



ಅಕ್ಷ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿ **ಅಬ** ಇದನ್ನು **ಕ್ಷ'** ದಷ್ಟು, ಮತ್ತು **ಅಕ** ಇವನ್ನು **ಯ'** ದಷ್ಟು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಅಬ** ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳ ವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಪರಿಘಕ್ಕೆ **ಡ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಅಡ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ **ಅಡ** ಇದು ಇಷ್ಟ ರೇಷೆ ಆಗುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ಅಡಬ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ **ಡ** ಕಾಟಕೋನವಿದೆ. ಯಾಕೆಂದರೆ, ಅದು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಕೋನವಾಗಿದೆ; ಮತ್ತು **ಡಕ $\perp$ ಅಬ.**

$\therefore$ **ಅಡ**^{2} = **ಅಬ · ಅಕ** = **ಕ್ಷ' · ಯ'.**

$\therefore$ **ಅಡ** ರೇಷೆಯು **ಕ್ಷ'** ಮತ್ತು **ಯ'** ಗಳ ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣಪದ ಆಗುವದು.

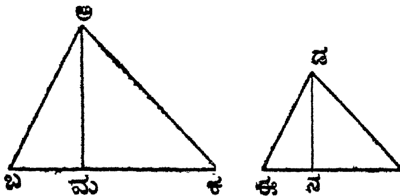
ಈ ರಚನೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಆದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯರಿಗೆ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ರಚನೆಯೇ ಸುಲಭವಾಗಿ ತೋರುವದು.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ $\sqrt{೨೨}$, $\sqrt{೬೩}$ ಇಂಥ ಸರಿಯಾದ ಉದ್ದಳತೆಯ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಸಾಧ್ಯ ಉಂಟು. ಯಾಕೆಂದರೆ, **ಕ್ಷ'** = ೫೪ ಮತ್ತು **ಯ'** = ೪ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, **ಮ'** = $\sqrt{೨೨}$ ಬರುವದು. ಆದರಂತೆ **ಕ್ಷ'** = ೯ **ಯ'** = ೭ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, **ಮ'** = $\sqrt{೬೩}$ ಬರುವದು.

---

೭೮ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯ.

ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು, ಅವುಗಳ ತತ್ಸಮ ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಚೌರಸಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವವು.



ಪಕ್ಷ:— **ಅಬಕ, ಡಈಫ** ಇವೆರಡು ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ:— $\frac{\triangle \text{ ಅಬಕ}}{\triangle \text{ ಡಈಫ}} = \frac{\text{ಬಕ}^{೨}}{\text{ಈಫ}^{೨}}$

ರಚನೆ:— ಬಕದ ಮೇಲೆ **ಅಮ** ಮತ್ತು **ಈಫ**ದ ಮೇಲೆ **ಡನ** ಲಂಬಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— $\triangle$ **ಅಬಕ** $= \frac{೧}{೨}$ **ಬಕ · ಅಮ** ಮತ್ತು

$\triangle$ **ಡಈಫ** $= \frac{೧}{೨}$ **ಈಫ · ಡನ.**

$$\therefore \frac{\triangle \text{ ಅಬಕ}}{\triangle \text{ ಡಈಫ}} = \frac{\frac{೧}{೨} \text{ ಬಕ} \cdot \text{ಅಮ}}{\frac{೧}{೨} \text{ ಈಫ} \cdot \text{ಡನ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (೧).$$

ಪರಂತು, **ಅಬಮ, ಡಈನ** ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle$ **ಬ** $=$ $\angle$ **ಈ** ($\because$ **ಅಬಕ, ಡಈಫ** ಇವು ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳು.)

ಮತ್ತು $\angle$ **ಮ** $=$ $\angle$ **ನ** (ಕಾಟಕೋನ)

$\therefore$ **ಅಬಮ, ಡಈನ** ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮಿಥಃಕೋನಗಳಿರುವದರಿಂದ ಸರೂಪವಾಗಿವೆ.

$\therefore$ **ಅಮ : ಡನ = ಅಬ : ಡಈ**

ಪರಂತು ಅಬ: ಡಈ = ಬಕ: ಈಫ (∵ ಅಬಕ, ಡಈಫ ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳು)

$$\therefore \frac{\text{ಅಮ}}{\text{ಡನ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಈಫ}} \text{ ....ಇವನ್ನು (೧) ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ,}$$

$$\frac{\triangle \text{ ಅಬಕ}}{\triangle \text{ ಡಈಫ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಈಫ}} \cdot \frac{\text{ಅಮ}}{\text{ಡನ}} = \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಈಫ}} \cdot \frac{\text{ಬಕ}}{\text{ಈಫ}}$$

$$= \frac{\text{ಬಕ}^{೨}}{\text{ಈಫ}^{೨}}.$$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೮.

೧. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ವ್ಯಾಸವಿದೆ. ಅ ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಯಾವದೊಂದು ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಪ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು; ಮತ್ತು ಬ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಫ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಅಪ. ಅಫ = ನಿಯುತ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಪ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ರೇಖೆಯು, ಬೇರೆ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಫ ಮತ್ತು ರ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಮಪ^{೨} = ಪಫ. ಪರ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. △ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ ∠ ಅ ಕಾಟಕೋನವಿದೆ. ಅಡ ⊥ ಬಕ ಆದರೆ ಬಡ: ಡಕ = ಅಬ^{೨}: ಅಕ^{೨} ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಭೂಮಿತಿಯಿಂದ ೩ ರ ಚತುರ್ಥಮೂಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.

($\sqrt{೩}$ ಮತ್ತು ೧ ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣಪದ ತೆಗೆಯಿರಿ.)

೫. ಅಬಕ, ಡಈಫ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ∠ ಅ = ∠ ಡ ಇದ್ದರೆ, △ ಅಬಕ: △ ಡಈಫ = ಅಬ. ಅಕ: ಡಈ. ಡಫ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

[ಬಮ ⊥ ಅಕ, ಈನ ⊥ ಡಫ ತೆಗೆಯಿರಿ.]

೬. ಅಬಕಡ, ಪಫರಸ ಮಿಥಃ ಸಮಕೋನ ಸಮಾ. ಭು. ಚೌ. ಇವೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ಅಬ . ಅಡ : ಪಫ . ಪಸ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ ಸರಿಯಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

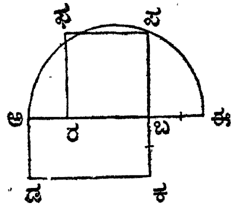
೭. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ ಪ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪಅ, ಪಬ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು △ಪಅಬ : △ಮಅಬ = ಪಅ² : ಮಅ² ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೮. ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳಾಗುವಂತೆ, ಆ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರೂ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ಒಂದೊಂದರಂತೆ ಮೂರು ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಆಗ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುವದು.

೯. ೬೬ ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣಪದ ತೆಗೆಯುವ ರಚನೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣದ ರಚನೆಗನುಸರಿಸಿ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ರಚನೆಗಳು.

೧. ಕೊಟ್ಟ ಆಯತಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವ ಚೌರಸವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.



ಪೃಥಕ್ಕರಣ:— **ಅಬಕಡ** ಇದು ಕೊಟ್ಟ ಆಯತವೂ, **ಬಪಫರ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಚೌರಸವೂ ಆಗಿದ್ದರೆ, **ಬಪ²** = **ಅಬ . ಬಕ**, ಅಂದರೆ **ಬಪ** ಇದು **ಅಬ**, **ಬಕ** ಗಳಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣಪದ ಇರುವದು. ಇದರಿಂದ ಇಷ್ಟ ರಚನೆಯ ತಿಳುವಳಿಕೆಯಾಗುವದು.

ರಚನೆ:— **ಬಕ** ದಷ್ಟು **ಬಈ** ಆಗುವಂತೆ **ಅಬ** ರೇಷೆಯನ್ನು ಈ ವರೆಗೆ ಬೆಳೆಸಿರಿ. **ಈಅ** ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲೆ ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಕಬ** ಬೆಳೆಸಿರಿ. ಅದು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘಕ್ಕೆ **ಪ** ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. **ಬಪಫರ** ಇದು **ಬಪ** ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಚೌರಸವಿದ್ದು, **ಅಬಕಡ** ಆಯತದಷ್ಟಿದೆ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— ರಚನೆಯಿಂದ **ಬಪ** ರೇಷೆಯು **ಅಬ, ಬಈ** ಗಳಲ್ಲಿಯ ಮ. ಪ್ರ. ಪದವಿದೆ.

$\therefore$ **ಬಪ**^{೨} = **ಅಬ · ಬಈ** = **ಅಬ · ಬಕ**

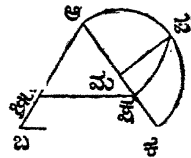
ಅಂದರೆ **ಬಪಫರ** ಚೌರಸ = **ಅಬಕಡ** ಆಯತ.

೨. ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವ ಚೌರಸವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

[ಚೌರಸದ ಭುಜವು ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರದಷ್ಟು, ಮತ್ತು ತಳರೇಷೆಯ ಅರ್ಧ ರೇಷೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಮ. ಪ್ರ. ಪದದಷ್ಟು ಇರುವದು.]

೩. ಕೊಟ್ಟ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರವುಳ್ಳ ಚೌರಸವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೪. △ **ಅಬಕ** ಇದರ **ಬಕ** ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಅದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.



ಪೃಥಕ್ಕರಣ :—ಕ್ಷಕ್ಷ' ಇದು ಇಷ್ಟ ರೇಷೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, △ **ಅಕ್ಷಕ್ಷ'** : △ **ಅಬಕ** = ೧ : ೨ ಪರಂತು △ **ಅಕ್ಷಕ್ಷ'** : △ **ಅಬಕ** = **ಅಕ್ಷ**^{೨} : **ಅಕ**^{೨} ಯಾಕೆಂದರೆ ಇವು ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳು.

$\therefore$ **ಅಕ್ಷ**^{೨} = $\frac{೧}{೨}$ **ಅಕ**^{೨} = ($\frac{೧}{೨}$ **ಅಕ**) (**ಅಕ**)

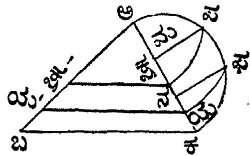
ಅಂದರೆ **ಅಕ** ಮತ್ತು $\frac{೧}{೨}$ **ಅಕ** ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಮ. ಪ್ರ. ಪದವು **ಅಕ್ಷ** ದಷ್ಟಿದೆ.

ರಚನೆ :— ಅಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಮದಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ. ಅಕ ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಕದ ಮೇಲೆ ಮಪ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘವನ್ನು ಪದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. (ಅ, ಅಪ) ವರ್ತುಳದ ಕಂಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಅಕಕ್ಕೆ ಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಬಕಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಕ್ಷಕ್ಷ' ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ:— △ ಅಕ್ಷ'ಕ್ಷ : △ ಅಬಕ = △ ಅಕ್ಷ² : ಅಕ²
= ಅಪ² : ಅಕ² = ಅಮ·ಅಕ : ಅಕ² = ಅಮ : ಅಕ = ೧ : ೨

೫. ಬಕಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು △ ಅಬಕದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಪೃಥಕ್ಕರಣ :— ಕ್ಷಕ್ಷ', ಯಯು' ಇವು ಇಷ್ಟ ರೇಖೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,
△ ಅಕ್ಷಕ್ಷ' : △ ಅಯಯು' : △ ಅಬಕ = ೧ : ೨ : ೩.



∴ ಅಕ್ಷ² : ಅಯು² : ಅಕ² = ೧ : ೨ : ೩

∴ ಅಕ್ಷ² = ೧/೩ ಅಕ²; ಅಯು² = ೨/೩ ಅಕ².

∴ ಅಕ್ಷ ರೇಖೆಯು ಅಕ ಮತ್ತು ೧/೩ ಅಕ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಮ. ಪ್ರ. ಪದ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಅಯು ರೇಖೆಯು ಅಕ ಮತ್ತು ೨/೩ ಅಕ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಮ. ಪ್ರ. ಪದ ಇರುವದು. ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ರಚನೆಯು ತಿಳುವಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವದು.

ರಚನೆ:— ಅಕ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮ, ನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಮೂರು ಸರಿಯಾದ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಅಕ ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲೆ ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಕ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮ, ನಗಳಿಂದ ಮಪ, ನಫ ಲಂಬಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘವನ್ನು ಪ, ಫ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು.

(ಅ, ಅಷ) ವರ್ತುಳ ಕಂಸ ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅದು **ಅಕ**ಕ್ಕೆ **ಕ್ಷ**ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

(ಅ, ಅಫ) ವರ್ತುಳಕಂಸ ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅದು **ಕಅ**ಕ್ಕೆ **ಯ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಬಕಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ **ಕ್ಷಕ್ಷ′, ಯಯ′** ರೇಷೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

*೬. ಕೊಟ್ಟ ರೇಷೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಷೆಯಿಂದ △ **ಅಬಕ** ದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಪೃಥಕ್ಕರಣ:–ಕ್ಷ′ ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರೇಷೆ, **ಕ್ಷಯ** ಇದು ಇಷ್ಟ ರೇಷೆಯಾಗಿದ್ದರೆ,

$\triangle$ **ಕಕ್ಷಯ** $= \frac{1}{2}$ $\triangle$ **ಅಬಕ**

ಬಕದಲ್ಲಿ **ಮ** ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದ್ದರೆ,

$\triangle$ **ಕಅಮ** $= \frac{1}{2}$ $\triangle$ **ಅಬಕ**

$\therefore$ $\triangle$ **ಕಕ್ಷಯ** $=$ $\triangle$ **ಕಅಮ**

ಅಡ, ಮನ ರೇಷೆಗಳು **ಕ್ಷ′**ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇದ್ದರೆ,

$$\frac{\triangle\ \text{ಕಕ್ಷಯ}}{\triangle\ \text{ಕಅಡ}} = \frac{\text{ಕಕ್ಷ}^{2}}{\text{ಕಅ}^{2}} \text{ ಮತ್ತು } \frac{\triangle\ \text{ಕಅಮ}}{\triangle\ \text{ಕಅಡ}} = \frac{\text{ಕಮ}}{\text{ಕಡ}} = \frac{\text{ಕನ}}{\text{ಕಅ}}.$$

$$\therefore \frac{\text{ಕಕ್ಷ}^{2}}{\text{ಕಅ}^{2}} = \frac{\text{ಕನ}}{\text{ಕಅ}} \quad \therefore \text{ಕಕ್ಷ}^{2} = \text{ಕಅ} \cdot \text{ಕನ}.$$

$\therefore$ **ಕಕ್ಷ** ಇದು **ಕಅ, ಕನ** ಗಳಲ್ಲಿಯ ಮ. ಪ್ರ. ಪದ ಇರುವದು.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ರಚನೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

೭. **ಬಕ**ದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ರೇಷೆಯಿಂದ △ **ಅಬಕ** ಇದರಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. [ಮೇಲಿನ ಉದಾ. ೬ಕ್ಕೆ ಇದು ಸರೂಪ ವಿಶೇಷವಾಗಿದೆ.]

*೮. ಕೊಟ್ಟ △ **ಅಬಕ** ದಷ್ಟು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಪೃಥಕ್ಕರಣ :–ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿಯ **ಮಬನ** ಇದು ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು **ಬಕ** ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ **ಡಬಕ** ಇದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ,

△ **ಬಮನ** = △ **ಅಬಕ** ಮತ್ತು

△ **ಬಮನ** : △ **ಬಡಕ** = **ಬಮ**^{2} : **ಬಡ**^{2}

ಅ ದಿಂದ **ಬಕ** ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಯು **ಬಡ** ಕ್ಕೆ **ಈ** ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುತ್ತಿದ್ದರೆ,

△ **ಬಈಕ** = △ **ಅಬಕ** ಮತ್ತು

△ **ಬಈಕ** : △ **ಬಡಕ** = **ಬಈ** : **ಬಡ**

∴ △ **ಬಮನ** = △ **ಬಈಕ** ∴ △ **ಬಮನ** : △ **ಬಡಕ** = △ **ಬಈಕ** : △ **ಬಡಕ** ∴ **ಬಮ**^{2} : **ಬಡ**^{2} = **ಬಈ** : **ಬಡ** ∴ **ಬಮ**^{2} = **ಬಈ** · **ಬಡ**.

ಅಂದರೆ **ಬಮ** ಇದು **ಬಈ, ಬಡ** ಗಳಲ್ಲಿಯ ಮ. ಪ್ರ. ಪದ ಇರುವದು.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

*೯. ಕೊಟ್ಟ **ಪಫರ** ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸರೂಪ, ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ △ **ಅಬಕ** ಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. [ಮೇಲಿನ ಉದಾ. ೮ ರಿಂದ ಈ ರಚನೆಯು ತಿಳಿಯಬಹುದು.]

*೧೦. ಕೊಟ್ಟ ಆಯತಕ್ಕೆ ಸಮಕ್ಷೇತ್ರ ಇರುವ, ಕೊಟ್ಟ ಲಘುಕೋನದಷ್ಟು ಕೋನವಿರುವ, ಮತ್ತು ಲಘುಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಗುಣೋತ್ತರದಷ್ಟು, ಗುಣೋತ್ತರ ಭುಜಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಮುದಾಯ ೫.

ಅ

೧. ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಿಂದ ಕಡಕ್ಕೆ ಈ ಮತ್ತು ಫ ಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡುವ, ಹಾಗೂ ಡಈ : ಫಕ = ಕೊಟ್ಟ ಗುಣೋತ್ತರ ಆಗುವಂತೆ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

[ಅಪ : ಪಬ = ಡಫ : ಫಕ = ಕೊಟ್ಟ ಗುಣೋತ್ತರ, ಆಗುವಂತೆ ಪ ಮತ್ತು ಫ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅಬ, ಕಡಗಳಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಇಷ್ಟ ರೇಷೆಯು ಪಫ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಆಗುವದು.]

೨. ಕೊಟ್ಟ ಪರಿಮಿತಿಗೆ ಸರಿಯಾದ, ಮತ್ತು ೪ : ೫ : ೬ ಗುಣೋತ್ತರದ ಭುಜಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

*೩. △ ಅಬಕದಲ್ಲಿ ಯ ಅಂತರ್ಮಧ್ಯವಿದೆ. ಮತ್ತು ಅಯ ರೇಷೆಯು ಬಕಕ್ಕೆ ಡದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

$$(೧)\ ಅಡ^೨ = \frac{೪\ ಅಕ.ಅಬ}{(ಅಕ + ಅಬ)^೨} \times ಸ\,(ಸ - ಬಕ);$$

$$(೨)\ ಅಯ^೨ = ಅಕ.ಅಬ \times \frac{ಸ - ಬಕ}{ಸ}.$$ ಇದರಲ್ಲಿ ೨ಸ = ಬಕ + ಕಅ + ಅಬ.

೪. ತ ಮತ್ತು ರ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಪ ಮತ್ತು ಫ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಪ ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಯಾವದೊಂದು ರೇಷೆಯು ಆ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಪುನಃ ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ಫಅ : ಫಬ = ತ : ರ. ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಪ, ಅಫ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಗಳಿವೆ. ಮತ್ತು ಅಬ ವ್ಯಾಸವಿದೆ. ಪಮ, ಫನ ಇವು ಅಬದ ಮೇಲೆ ಲಂಬಗಳಾಗಿವೆ. ಆದರೆ, ಅಮ : ಅನ = ಅಪ^೨ : ಅಫ^೨ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಕ

೧. ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ಸಮಾ. ಭು. ಚೌ. ಇದೆ. ಅ ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಒಂದು ರೇಷೆಯು ಬಡಕ್ಕೆ ಪ ದಲ್ಲಿ, ಬಕಕ್ಕೆ ಫ ದಲ್ಲಿ, ಮತ್ತು ಬೆಳಸಿದ ಡಕಕ್ಕೆ ರ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ಅಪ : ಪರ = ಅಫ : ಅರ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಕ್ಷ ಏಕಾಂಕ ಉದ್ದಳತೆಯ ಒಂದು ರೇಖೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದರೆ ಕ್ಷ² ಏಕಾಂಕ ಉದ್ದಳತೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖೆಯ ರಚನೆ ಮಾಡಿರಿ.

೩. △ಅಬಕದಲ್ಲಿಯ ಅ ಶಿರೋಬಿಂದುವಿನ ಎದುರಿನ ಬಹಿರ್ವೃತ್ತವು ಬಕಕ್ಕೆ ಡ₁ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು. ಈ ಇದು ಅಂತರ್ವೃತ್ತದ ಬಕದಿಂದ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೂರವಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಅ, ಈ, ಡ₁ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ವರ್ತುಳಾಂತರ್ಗತ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಆ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದ ಮೇಲೆ ಯಾವದೊಂದು ಪ ಬಿಂದುವಿದೆ. ಅಬ, ಬಕ, ಕಡ, ಡಅಗಳ ಮೇಲೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪಕ್ಷ, ಪಯ, ಪಝ, ಪಜ್ಞ ಲಂಬಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಪಕ್ಷ • ಪಝ = ಪಯ • ಪಜ್ಞ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ∠ಕ ಇದು ಕಾಟಕೋನವಿದೆ. ಅನ ⊥ ಬಕ. ∠ಬದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಅಕಕ್ಕೆ ಈದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅನಕ್ಕೆ ಫದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ, ಅಫ : ಫನ = ಕಈ : ಈಅ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಖ

೧. ಮಅಬ ಇದೊಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲೆ ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅ ಮತ್ತು ಬ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಅಪ, ಬಫ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅಪ : ಬಫ = ಮಅ : ಮಬ ಇದ್ದರೆ, ಮಪಫ ಇದೊಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಾಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಅಬಕ, ಡಈಫ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ, ಅಬ || ಡಈ, ಬಕ || ಈಫ, ಕಅ || ಫಡ ಇದ್ದರೆ ಅಡ, ಬಈ, ಕಫ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು; ಅಥವಾ ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅದರ ಹೊರಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಟಪ, ಟಫ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಪಫ ರೇಖೆಯು ಮಟ ರೇಖೆಯನ್ನು ರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಮರ : ಮಪ = ಮಪ : ಮಟ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. △ಅಬಕದ ∠ಅದ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಬೆಳೆಸಿದ ಬಕ ರೇಖೆಗೆ ಡದಲ್ಲಿ, ಮತ್ತು ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಈದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ಅಬ • ಅಕ = ಅಡ • ಅಈ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಟಪ, ಟಫ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಪರಿಘದ ಮೇಲೆ ಯಾವದೊಂದು ಕ್ಷ ಬಿಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದರಿಂದ ಟಪ, ಟಫ, ಪಫಗಳ ಮೇಲೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಷಅ, ಕ್ಷಬ, ಕ್ಷಕ ಲಂಬಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಕ್ಷಅ. ಕ್ಷಬ = ಕ್ಷಕ² ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಗ

೧. ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಅಬದಲ್ಲಿ ಮ, ಮತ್ತು ಕಡದಲ್ಲಿ ನ ಇವು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಡಮ ಮತ್ತು ಬನ ಇವು ಅಕದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ಮೂರು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. △ಅಬಕದಲ್ಲಿ ಅಬ, ಅಕ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಪ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಬ, ಅಕ, ಬಕಗಳ ಮೇಲೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪಕ್ಷ, ಪಯ, ಪಝ ಲಂಬಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಪಕ್ಷ. ಪಯ = ಪಝ² ಇದ್ದರೆ ಪದ ಬಿಂದುಪಥವು, ಅಬ, ಅಕಗಳಿಗೆ ಬ ಮತ್ತು ಕಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ['ಖ' ದಲ್ಲಿಯ ಉದಾ. ೫ಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.]

೩. △ಅಬಕದಲ್ಲಿ ಅಲ, ಬಮ, ಕನ ಇವು ಎತ್ತರಗಳಿವೆ. ಅಲ ರೇಖೆಯು ನಮ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕ್ಷ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ನಲ: ಲಮ = ನಕ್ಷ: ಕ್ಷಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ, ಅಕ ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಅಟ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು ಅದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು. ಅಟಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದ ಕಡ ರೇಖೆಯು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ ಬೆಳಿಸಿದ ಅಬಕ್ಕೆ ಡದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ಅಬ: ಅಕ = ಅಕ: ಅಡ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ಸಮಲಂಬವಿದೆ. ಅಕ, ಬಡ ಇವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಪದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು; ಮತ್ತು ಅಡ, ಬಕ ಇವು ಫದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು. ಪಫ ರೇಖೆಯು ಅಬಕ್ಕೆ ಕ್ಷದಲ್ಲಿಯೂ, ಕಡಕ್ಕೆ ಯದಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಪಕ್ಷ: ಪಯ = ಫಕ್ಷ: ಫಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಘ

೧. △ಅಬಕದಲ್ಲಿಯ ∠ಬದ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಅಮ ಲಂಬವಿದೆ. ಮದಿಂದ ಬಕಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಯು ಅಕಕ್ಕೆ ನದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಅನ = ನಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಪಫರ ಇದೊಂದು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. ಪ ದಿಂದ ದೂರವಾಗಿರುವ ಫರ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಮ ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಬೆಳಿಸಿದ ಫಮ ರೇಖೆಯು ಬೆಳಿಸಿದ ಪರಕ್ಕೆ ಕ್ಷ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು; ಮತ್ತು ಬೆಳಿಸಿದ ರಮ ರೇಖೆಯು ಬೆಳಿಸಿದ ಪಫಕ್ಕೆ ಯ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ಫರಯ, ರಕ್ಷಫ ಇವು ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

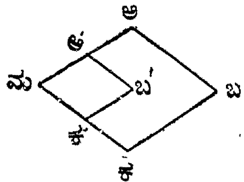
೩. ಅಬಕಡಈ ಇದೊಂದು ಸುಸಮ ಪಂಚಕೋನವಿದೆ. ಬಈ ರೇಖೆಯು ಅಡಕ್ಕೆ ಕ್ಷ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ ಅಡ : ಅಈ = ಅಈ : ಈಕ್ಷ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಮಕ್ಷ, ಮಯ ಇವೆರಡು ನಿಯತ ರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಇವೆರಡು ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬಗಳು ಕೊಟ್ಟ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪ ಇದೊಂದು ಚಲ ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದರೆ ಪ ದ ಬಿಂದುಪಥ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೫. ಮ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗೆ ಟ ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಟ ದಿಂದ ಟಪ, ಟಫ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಟಮ ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಲ್ಲಿಯೂ, ಪಫ ರೇಖೆಗೆ ನ ದಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವದು. ಆದರೆ, ೧/ಟಅ + ೧/ಟಬ = ೨/ಟನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫

೧. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಮಅಬಕ ಇದೊಂದು ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಇದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತುದಿಯು ಬೇಕಾದತ್ತ ಚಲಿಸುವಂತೆ ದಂಡಿಗೆಗಳಿಂದ ಇದನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದೆ. ಅ'ಬ'ಕ' ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವಂಥ ಅ'ಬ', ಬ'ಕ' ದಂಡಿಗೆಗಳಿಂದ ಮಅ'ಬ'ಕ' ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದೆ. ಮ ಬಿಂದು ಸ್ಥಿರವಾಗಿಟ್ಟು ಆ ಚೌಕೋನವನ್ನು ಬೇಕಾದತ್ತ ಹಿಗ್ಗಿಸಿದರೂ, ತಗ್ಗಿಸಿದರೂ ಯಾವದೇ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ (೧) ಮ, ಬ', ಬ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವವು; ಮತ್ತು (೨) ಮಬ' : ಮಬ = ನಿಯತ ಗುಣೋತ್ತರ; ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



[ಮ ಸ್ಥಿರವಿದ್ದು ಬ' ಇದನ್ನು ಬೇಕಾದತ್ತ ಆಕೃತಿಗಳ ಸೀಮಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅಲೆದಾಡಿಸುವಾಗ ಬ ದಲ್ಲಿರುವ ಪೆನ್ಸಿಲಿನಿಂದ (ಸೀಸು ಕಡ್ಡಿಯಿಂದ) ಹೊರಡುವ

ಹೊಸ ಆಕೃತಿಯು ಮೂಲ ಆಕೃತಿಯ ಸರೂಪವಾಗಿರುವದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಕಾಶ, ಚಿತ್ರ ಮೊದಲಾದವುಗಳನ್ನು ಇದ್ದಕ್ಕಿದ್ದ ಹಾಗೆ ಸಣ್ಣದಾಗಿ ಇಲ್ಲವೆ ದೊಡ್ಡ ದಾಗಿ ತೆಗೆಯುವರು. ಇದನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಯಂತ್ರಕ್ಕೆ ಇಂಗ್ಲೀಷಿನಲ್ಲಿ ಪ್ಯಾಂಟೋ ಗ್ರಾಫ (Pantograph) ಅನ್ನುವರು. ನಾವು ಇದಕ್ಕೆ 'ಚಿತ್ರಲೇಖನ ಯಂತ್ರ' ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.]

೨. ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿರುವ ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಟಡ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಇನ್ನೊಂದು ಛೇದಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಟಅ:ಟಬ=ಅಡ^2:ಬಡ^2 ಎಂಬದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ತೆಗೆಯದೆ, ಅಥವಾ ಅದರ ಉಪಯೋಗ ವನ್ನು ಮಾಡದೆ, ವರ್ತುಳದ ಹೊರಗಿನ ಡ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಯನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯಬೇಕು ?

[ಡಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿಯೂ, ಡಅಬ ಛೇದಕ ರೇಖೆಯಾಗಿಯೂ ಇದ್ದರೆ ಡಟ^2 = ಡಅ • ಡಬ ಇರುವದು; ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

೪. ಅಬಕ ಇದೊಂದು ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. ಒಂದು ವರ್ತುಳವು ಅಕ ಕ್ಕೆ ಅ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು, ಮತ್ತು ಬ ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು. ಹಾಗೂ ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳವು ಅಕ ಕ್ಕೆ ಅ ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು ಮತ್ತು ಕ ದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು. ಆ ವರ್ತುಳಗಳು ಪುನಃ ಡ ದಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವವು. ಆದರೆ ಡಅ^2 = ಡಬ • ಡಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಕ್ಷಮಯ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಡ ಇದೊಂದು ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದು ಇದೆ. ಡ ದಿಂದ ಮ್ಯಕ್ಷ ಕ್ಕೆ ಅ ದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮಯ ಕ್ಕೆ ಬ ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ತೆಗೆಯಿರಿ, ಅಂದರೆ ಅಡ : ಡಬ ಗುಣೋತ್ತರವು ಕೊಟ್ಟ ಗುಣೋತ್ತರದಷ್ಟು (ಅದು ೩ : ೪ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ) ಆಗುವದು.

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಮೂಲತತ್ವಗಳು

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಮೂಲತತ್ವಗಳು

೧ ನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಲಘುಕೋನದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯು (Tangent)

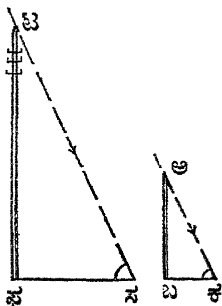
೧. ಪ್ರಶ್ನ:—ತಂತಿಯ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು.

ಒಬ್ಬ ಬಾಲವೀರನು ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೇಳಿದನು:—

ತನಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದ ಅಳತೆಯ ಒಂದು ಕೋಲನ್ನು ಕ್ಷಿತಿಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ನಿಲ್ಲಿಸಿದನು. ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿಂದ ಬಿದ್ದ ನೆರಳನ್ನು ಅಳೆದನು. ಅದೇ ಕಾಲಕ್ಕೆ ತಂತಿಯ ಕಂಬದ ಬಿದ್ದ ನೆರಳನ್ನೂ ಅಳೆದು ನೋಡಿದನು. ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದನು.

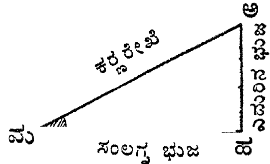
$$\frac{\text{ತಂತಿಯ ಕಂಬದ ಎತ್ತರ}}{\text{ಕೋಲಿನ ಎತ್ತರ}} = \frac{\text{ಕಂಬದ ನೆರಳಿನ ಎತ್ತರ}}{\text{ಕೋಲಿನ ನೆರಳಿನ ಎತ್ತರ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(೧)$$

ಈ ಪ್ರಮಾಣದ ಸತ್ಯತೆಯು ಹೇಗೆ? ಯಾವದೊಂದು ವಿವಕ್ಷಿತ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ತಂತಿಯ ಕಂಬಕ್ಕೂ, ಕೋಲಿಗೂ ತಾಗುವ ಸೂರ್ಯ ಕಿರಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರ ವಾಗಿರುವವು. **ಟಫ** ತಂತಿಯ ಕಂಬ, **ಫಸ** ಅದರ ನೆರಳು; ಮತ್ತು **ಅಬ** ಕೋಲು, **ಬಕ** ಅದರ ನೆರಳು ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ **ಟಸ**॥ **ಅಕ**; **ಟಫ**॥ **ಅಬ**; **ಫಸ**॥ **ಬಕ** ಆಗುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ **ಟಫಸ** ಮತ್ತು **ಅಬಕ** ಇವು ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗುವವು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮೇಲಿನ (೧) ಈ ಪ್ರಮಾಣವು ಹೊರಡುವದು.



೨. ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಗುಣೋತ್ತರ. (Tangent ratio)

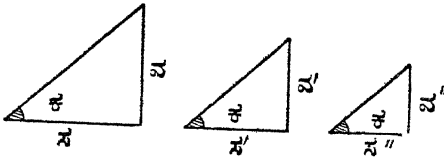
ಮಅಹ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ದಲ್ಲಿಯ **ಮ** ಲಘುಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, **ಅಹ** ಭುಜವು ಅದರ **ಎದುರಿನ ಭುಜ** ಇಲ್ಲವೆ **ವಿರುದ್ಧ ಭುಜ** (Opposite side) ಆಗುವದು. ಮತ್ತು **ಮಹ** ಭುಜವು



ಅದರ (ಮ ಕೋನದ) **ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜ** (Adjacent side) ಆಗುವದು. **ಮಅ** ಭುಜವು ನಿತ್ಯದಂತೆ ಕರ್ಣರೇಖೆಯೆನಿಸುವದು.

ಕ ಲಘುಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಇರುವಂಥ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಕಾರಗಳುಳ್ಳ ಹಲವು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವೆಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪ ಇರುವವು. (ಪ್ರಮೇಯ ೭೪ರ ಉಪಸಿ. ೩.)

$$\therefore \frac{\text{ವ}}{\text{ಸ}} = \frac{\text{ವ}'}{\text{ಸ}'} = \frac{\text{ವ}''}{\text{ಸ}''} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$



ಅಂದರೆ ಯಾವಾಗ **ಕ** ಕೋನದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುವದಿಲ್ಲವೋ ಆವಾಗ,

$$\frac{\text{ವಿರುದ್ಧ ಭುಜ}}{\text{ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜ}}$$

ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿಯೂ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುವದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಗುಣೋತ್ತರದ ಬೆಲೆಯು ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವದು. ಅದು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಆಕಾರಮಾನಗಳ ಮೇಲಲ್ಲ.**

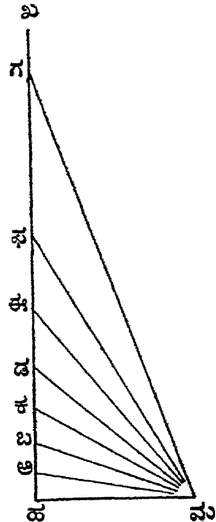
ಈ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ ನಾವು ಒಂದು ಹೊಸ ಹೆಸರನ್ನು ಇಡೋಣ. ಇದಕ್ಕೆ **ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಗುಣೋತ್ತರ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. "**ಕ** ಕೋನದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ" ಯನ್ನು **ಸ್ಪ** (**ಕ**) ಅಥವಾ **ಸ್ಪ ಕ** ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\text{ಸ್ಪ (ಕೋನ)} = \frac{\text{ಎದುರಿನ ಭುಜ}}{\text{ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜ}}.$$

೩. ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳ ಕೋಷ್ಟಕವು :—

೧೦°, ೨೦°, ೩೦° .... ಮೊದಲಾದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಕಾರವಾನಗಳುಳ್ಳ ಕೋನಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಅವಾ ಲಘುಕೋನಗಳುಳ್ಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು, ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳನ್ನು ೨ಳೆದು ನೋಡಿ ತಯಾರಿಸಬಹುದು. ಪರಂತು ಈ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಸುಲಭ ವಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲಿಕ್ಕೆ ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜದ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ಒಂದು ಇಂಚು ಎಂದು ನಿಶ್ಚಯಿಸಬೇಕು. **ಮಹ** ರೇಷೆಯ ಉದ್ದಳತೆ ೧ ಇಂಚು ಹಿಡಿದು, ಅದರ ಮೇಲೆ **ಹ** ದಲ್ಲಿಂದ **ಹಖ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಮ** ದ ಹತ್ತಿರ ೧೦°, ೨೦° .... ಮೊದಲಾದ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಹಮಅ, ಹಮಬ** .... ಕೋನ ಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. (**ಮಹ** = ೧ ಇರುವದರಿಂದ) ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ,

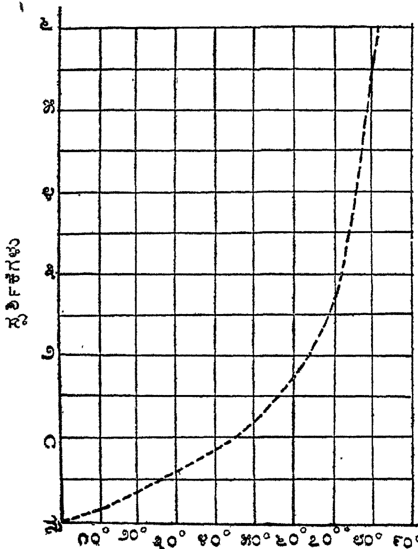
ಸ್ಪ ೧೦° = ಅಹ / ಮಹ = ಅಹ = ·೧೮
ಸ್ಪ ೨೦° = ಬಹ / ಮಹ = ಬಹ = ·೩೬
ಸ್ಪ ೩೦° = ಕಹ / ಮಹ = ಕಹ = ·೫೮
ಸ್ಪ ೪೦° = ಡಹ / ಮಹ = ಡಹ = ·೮೪
ಸ್ಪ ೫೦° = ಈಹ / ಮಹ = ಈಹ = ೧·೨
ಸ್ಪ ೬೦° = ಫಹ / ಮಹ = ಫಹ = ೧·೭
ಸ್ಪ ೭೦° = ಗಹ / ಮಹ = ಗಹ = ೨·೭



ಇದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಸ್ಪ ೮೦° = ೫·೭ ಎಂಬದನ್ನು ತೋರಿಸ ಬಹುದು. ೮೦° ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಕೋನ ವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅದು ದೊಡ್ಡ ದಾಗುತ್ತ ಹೋದಂತೆ (೮೦° ರಿಂದ ೯೦° ವರೆಗೆ) ಮೇಲಿನ ಗುಣೋತ್ತರವು ಬಲು ಬೇಗ ಬೆಳೆಯುತ್ತ ಹೋಗುವದು. ಮತ್ತು ಕೋನವು ೯೦° ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪ ಬಂದ ಹಾಗೆ

ಆ ಗುಣೋತ್ತರದ ಬೆಲೆಯು ಯಾವದೆ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಗುಣೋತ್ತರವು **ಅನಂತದ ಕಡೆಗೆ** (tends to infinity) ಹೋಗುವದು. ಈ ಅನಂತದ ದರ್ಶಕವನ್ನು ∞ ಈ ಚಿಹ್ನದಿಂದ ತೋರಿಸುವರು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾದರಿಯ ಕೋಷ್ಟಕ ವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಕೋನ	೧೦°	೨೦°	೩೦°	೪೦°	೫೦°	೬೦°	೭೦°	೮೦°	೯೦°
ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ	·೧೮	·೩೬	·೫೮	·೮೪	೧·೨	೧·೭	೨·೭	೫·೭	∞.



ಕೋನವನ್ನು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆಯೂ, ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯನ್ನು ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆಯೂ ತೋರಿಸುವಾಗ ಈ ಬದಿಯ **ಆಲೇಖ** (graph)-ವು ಹೊರಡುವದು.

ಈ ಆಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ ೧೮°, ೩೭° ಮೊದಲಾದ ಕೋನಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಆಸನ್ನಮಾನದಿಂದ ತೆಗೆಯಬಹುದು.

೪. ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಗುಣೋತ್ತರದ ಮಾನವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಸೂಕ್ಷ್ಮ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುವ ಕೋಷ್ಟಕವು.

ಅಂಶ	೦′	೬′	೧೨′	೧೮′	೨೪′	೩೦′	೩೬′	೪೨′	೪೮′	೫೪′	ನಡುವಿನ ಅಂತರ				
											೧′	೨′	೩′	೪′	೫′
೩೫	·೭೦೦೨	೭೦೨೮	೭೦೫೪	೭೦೮೦	೭೧೦೭	೭೧೩೩	೭೧೫೯	೭೧೮೬	೭೨೧೨	೭೨೩೯	೪	೯	೧೩	೧೮	೨೨
೩೬	·೭೨೬೫	೭೨೯೨	೭೩೧೯	೭೩೪೬	೭೩೭೩	೭೪೦೦	೭೪೨೭	೭೪೫೪	೭೪೮೧	೭೫೦೮	೫	೯	೧೪	೧೮	೨೩
೩೭	·೭೫೩೬	೭೫೬೩	೭೫೯೦	೭೬೧೮	೭೬೪೬	೭೬೭೩	೭೭೦೧	೭೭೨೯	೭೭೫೭	೭೭೮೫	೫	೯	೧೪	೧೮	೨೩
೩೮	·೭೮೧೩	೭೮೪೧	೭೮೬೯	೭೮೯೮	೭೯೨೬	೭೯೫೪	೭೯೮೩	೮೦೧೨	೮೦೪೦	೮೦೬೯	೫	೯	೧೪	೧೯	೨೪
೩೯	·೮೦೯೮	೮೧೨೭	೮೧೫೬	೮೧೮೫	೮೨೧೪	೮೨೪೩	೮೨೭೩	೮೩೦೨	೮೩೩೨	೮೩೬೧	೫	೧೦	೧೫	೨೦	೨೪

ಮೇಲ್ಕಂಡ ಕೋಷ್ಟಕವು ಸ್ಥೂಲಮಾನದಿಂದ ನೋಡುವದಿರುವದು. ಉಚ್ಚ ಗಣಿತದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಸೂಕ್ಷ್ಮ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ತೆಗೆದ ಕೋಷ್ಟಕವು ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂಬದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರಿಸೋಣ.

ಮೊದಲಿನ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ (ಉದ್ದ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ) ಕೋನದ ಅಂಶಗಳಿವೆ. ಶಿರೋಭಾಗದ (ಅಡ್ಡ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ) ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ೦ ರಿಂದ ೫೪ ರ ವರೆಗೆ ಆರಾರು ಪಟ್ಟುಗಳಿಂದ ಕೋನದ **ಕಲೆ** (೬೦ ಕಲೆ=೧ ಅಂಶ) ಗಳಿವೆ. ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲಿ ೧ ರಿಂದ ೫ ಕಲೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ ವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಚನ್ನಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಿದರೆ, ಈ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಕ್ರಮವು ನಿಮಗೆ ಸಹಜವಾಗಿ ತಿಳಿಯ ಬಹುದು :—

ಉದಾ. ೧:—ಸ್ಪ ೩೬° ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಅಂಶಗಳ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ೩೬ ರ ಅಂಕೆಯಿದೆ. ಆದರ ಎದುರಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ೦ ಕಲೆಯ ಕೆಳಬದಿಗೆ ·೭೨೬೫ ಈ ಅಂಕೆಯಿದೆ. ಅಂದರೆ ಇದರ ಅರ್ಥವು ಸ್ಪ ೩೬° = ·೭೨೬೫ ಎಂದು ಆಗುವದು.

ಉದಾ. ೨:—ಸ್ಪ ೩೫° ೨೪′ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩೫° ರ ಎದುರಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ೨೪′ ಯ ಕೆಳಬದಿಗೆ ೭೧೦೭ ಈ ಅಂಕೆಯಿದೆ. ಮುದ್ರಣದ ಸುಲಭತೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಕೇವಲ ೦′ ಯ ಕೆಳಬದಿಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ದಶಾಂಕ ಚಿಹ್ನದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಉಳಿದ ಕಲೆಗಳ ಕೆಳಬದಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕೆಗಳಂತೆ ಬರೆದಿಡುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ ಕೊನೆಗೆ ಉತ್ತರ ವನ್ನು ಹೇಳುವಾಗ ೭೧೦೭ ಇದರ ಬದಲು ·೭೧೦೭ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪ ೩೫° ೨೪′ = ·೭೧೦೭.

ಉದಾ. ೩:—ಸ್ಪ ೩೫° ೨೭′ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಶಿರೋ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ೨೭′ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ. ಇದರ ಸಮೀಪದ ಪರಂತು ಇದಕ್ಕಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಕಡಿಮೆಯುಳ್ಳ ೨೪′ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವದು. ಆದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲು ಸ್ಪ ೩೫° ೨೪′ = ·೭೧೦೭ ಇದನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು. (ಮೇಲಿನ ಉದಾ. ೨ ರಂತೆ) ಮತ್ತು (೨೭ – ೨೪ =) ೩ ಅಂತರದ ಸಲುವಾಗಿ 'ನಡುವಿನ

ಅಂತರ' ತೋರಿಸುವ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲಿ ೩ರ ಸ್ತಂಭದ ಕೆಳಗಿನ ಮತ್ತು ೩೫°ದ ಎದುರಿನ ಅಂಕೆಯನ್ನು ನೋಡಬೇಕು. ಅದು ೧೩ ಇರುವದು. ಇದನ್ನು ೭೧೦೭ ರಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ೭೧೨೦ ಆಗುವದು. ಅಂದರೆ ಇದರ ಅರ್ಥವು ಸ್ಪ ೩೫° ೨೭' = ·೭೧೨೦ ಎಂದು ಆಗುವದು.

ಉದಾ. ೪:— ಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ಯಾವದರ ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾ ಗುಣೋತ್ತರ ೧·೪೭೮೦ ಇರುವದೋ ಅಂಥ ಒಂದು (೧ ಕಲೆಯ ವರೆಗೆ ಸರಿ ಬರುವ) ಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧·೪೭೮೦ ರ ಸಮೀಪದ ಪರಂತು ಇದಕ್ಕಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಅಂಕೆಯು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ೧·೪೭೬೫ ಇರುವದು. ಅದು ೫೫° ೫೪' ಸಲುವಾಗಿ ಇದೆ. ೮೦ − ೬೫ = ೧೫ ಇದು ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವಿದೆ. 'ನಡುವಿನ ಅಂತರ'ದ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ೧' ಇದರ ಕೆಳಗೆ ೧೩ ಈ ಅಂಕೆಯಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಆಸನ್ನಮಾನದಿಂದ ಇಷ್ಟ ಕೋನವು ೫೫° ೫೫' ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬೇಕಿದ್ದರೆ, ಪ್ರಮಾಣ ಕೃತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ೧೫ − ೧೩ = ೨ ಈ ಅಂತರವನ್ನು $\frac{೨}{೧೩}$ ಕಲೆ = $\frac{೨}{೧೩}$ × ೬೦ ವಿಕಲೆ = ೯″ ಯಷ್ಟು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಇಷ್ಟ ಕೋನವು ೫೫° ೫೫' ೯″ ಆಗುವದು.

ಉದಾ. ೫:—ಯಾವದರ ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾ ಗುಣೋತ್ತರವು ೩·೪ ಇದೆಯೋ ಇಂಥದೊಂದು ಕೋನವನ್ನು (ಭೂಮಿತಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ) ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಇದು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದ ಕೋನದ ಅಳತೆಗೆ ಸರಿ ಬರುವದೋ ನೋಡಿರಿ. (ಮು. ವಿ. ೧೯೩೫).



ಮಹ ರೇಖೆಯನ್ನು ೧ ಇಂಚು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಮಹ**ದ ಮೇಲೆ **ಹಅ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು **ಹಅ** ೩·೪ ಇಂಚು ಅದನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿರಿ. **ಮಅ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ ∠**ಹಮಅ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಕೋನವಾಗುವದು. ಯಾಕೆಂದರೆ,

ಸ್ಪ ∠ **ಹಮಅ** = ವಿ. ಭುಜ/ ಸ. ಭುಜ = **ಹಅ/ಮಹ**

= ೩·೪/೧ = ೩·೪

∠ **ಹಮಅ** ಇದನ್ನು ಅಳೆದರೆ ಸುಮಾರು ೭೩½°ದಷ್ಟು ಆಗುವದು. ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ೭೩° ೩೭' ತೋರಿಸಿದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ ೧:—ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿಯ ಯಾವದೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ದಶಾಂಶ ಅಂಕೆಗಳು ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಕೊನೆಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಹೊಂದುವವೋ ಆಗ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಬರೆದು ತೋರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅದ್ದರಿಂದ ಮುಂದರಿಸಿದ ದಶಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ದಶಾಂಶ ಸ್ಥಳಗಳ ತಲೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅಡ್ಡ ಗೆರೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವರು. ಆಗ ಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ೧ನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಮುಂದಿನ ದಶಾಂಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕೆಂದು ತಾನೇ ತಿಳಿಯುವದು. ಅಂದರೆ ೧̄೦೬೬ ಹೀಗೆ.

ಉದಾ:—ಸ್ಪ ೭೧° ೫೪′ = ೩·೦೫೯೫; ಸ್ಪ ೭೮° ೫೬′ = ೫·೧೧೧೬ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ ೨:—ಕೋಷ್ಟಕವು ನಾಲ್ಕು ದಶಾಂಶ ಸ್ಥಳಗಳ ವರೆಗೆ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಅದಷ್ಟು ಸರಿಯಾಗಿ ದರ್ಶಿಸುವದು. ಅಂದರೆ ಮೇಲಿನ ೨ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ೩೫° ೨೪′ ಕೋನದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯ ಗುಣೋತ್ತರದ ಬೆಲೆಯು ·೭೧೦೬೫ ಮತ್ತು ·೭೧೦೭೪ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಯಾವದೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುವದು ಎಂಬರ್ಥ.

$$\text{ಸ್ಪ (ಕೋನ)} = \frac{\text{ಎದುರಿನ ಭುಜ}}{\text{ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜ}}$$

$\therefore$ **ಎದುರಿನ ಭುಜ = ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜ × ಸ್ಪ (ಕೋನ).**

ಅಂದರೆ, ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಎದುರಿನ ಭುಜ ಬರುವದು. ಮತ್ತು ಆ **ಗುಣಕ**ವು ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯ ಗುಣೋತ್ತರವಾಗಿರುವದು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಇದರ ಉಪಯೋಗವು ಚನ್ನಾಗಿ ಆಗುವದು. ಉದಾಹರಣಾರ್ಥವಾಗಿ ಪುಟ (೨೮೩) ದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನದಲ್ಲಿ ∠ **ಟಸಫ** ಇದು ೬೫° ಇದ್ದರೆ,

ಟಫ = **ಫಸ** × ಸ್ಪ ೬೫° = **ಫಸ** × ೨·೧೪೪೫ ಆಗುವದು. ಅಂದರೆ, **ಫಸ**ದ ಉದ್ದಳತೆಯೂ, **ಟಸಫ** ಕೋನದ ಅಳತೆಯೂ ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ, ಅದರಿಂದ **ಟಫ**ದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು. ತ್ರಿಕೋನದ **ಟಫ** ಭುಜವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಳೆದು ನೋಡಲಿಕ್ಕಾಗುವದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಫಸ ಭುಜ, ಟಸಫ** ಕೋನ ಇವುಗಳ ಅಳತೆಯಿಂದ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ **ಟಫ**ದ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಇದೇ **ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಉಪಯೋಗವು.**

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩-೧.

೧. ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೋಡಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಕೋನಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ:

೧೪°, ೧೯° ೬′, ೨೬° ೨೮′, ೬೧° ೪೭′.

೨. ಕೆಳಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವೆವು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಕೋನವನ್ನು ಒಂದು ಕಲೆಯ ವರೆಗೆ ಸರಿ ಬರುವಂತೆ ಹೇಳಿರಿ:—

.೧೩೧೨, .೫೯೪೩, ೧.೩೦೧೧, ೬.೦೫೪೬.

೩. ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{೩}{೪}$, $\frac{೨}{೫}$, ೧$\frac{೨}{೩}$, ೫.೨ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚನೆಯಿಂದ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಅದು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸರಿ ಬರುವದೋ ನೋಡಿರಿ.

೪. ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವು ೪ ಇಂಚು ಇದೆ. ಇದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೫. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ತಳರೇಖೆಯು ೪ ಇಂಚು ಮತ್ತು ಶಿರೋಕೋನವು ೩೨° ಇವೆ. ಇದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ:—

(೧) ಸ್ಪ ೫೦° $\neq$ ೨ ಸ್ಪ ೨೫°; (೨) ಸ್ಪ ೬೫° $\neq$ ಸ್ಪ ೩೦° + ಸ್ಪ ೩೫°.

೭. ಸ್ಪ ಅ = $\frac{೪}{೫}$ ಮತ್ತು ಸ್ಪ ಬ = $\frac{೫}{೪}$ ಇದರಿಂದ ಅ ಮತ್ತು ಬ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ; ಮತ್ತು ಅ + ಬ = ೯೦° ಎಂಬದರ ಸತ್ಯ ಶೋಧಿಸಿರಿ.

೮. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಅದರ ತಳರೇಖೆಯ ಹತ್ತಿರದ ಕೋನಗಳು ೪೮°, ೬೦° ಇರುವವು. ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರವು ೩$\frac{೧}{೩}$ ಇಂಚು ಇದೆ. ಆದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ತಳರೇಖೆಯ ಉದ್ದಳತೆ ಎಷ್ಟು?

೯. ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಅಂತರವು ೩೦ ವಾರ ಇದ್ದಾಗ ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬ ಎತ್ತರವು ೧ ವಾರದಿಂದ ಬೆಳೆಯುವದು. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಏರು ಇರುವದು. ಆದರೆ ಆ ಮಾರ್ಗದ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರವು ಪಾತಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂಶದ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವದು?

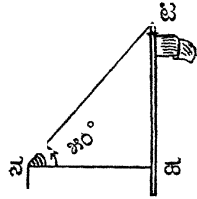
೧೦. ಸೂರ್ಯನು ೨೫° ದಿಂದ ಕ್ಷಿತಿಜದ ಮೇಲೆ ಬಂದಾಗ ಗಿರಣಿಯ ಹೊಗೆ ಬಂಬಿನ ನೆರಳು ೧೫೦ ಫೂಟು ಉದ್ದ ಬೀಳುವದು. ಆದರೆ ಆ ಹೊಗೆ ಬಂಬಿನ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

೨ನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

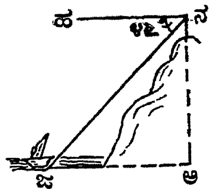
ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

೫. ಉನ್ನತಿದರ್ಶಕ ಕೋನ ಮತ್ತು ಅವನತಿ ದರ್ಶಕ ಕೋನ

ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು **ನ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಅವನು ಮೊದಲು ತನ್ನ ದುರ್ಬೀಣ ಯಂತ್ರವನ್ನು **ನಹ**ಕ್ಕೆ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರದಲ್ಲಿ ಹಚ್ಚಿ ನೋಡುವನು. ಆ ಮೇಲೆ ಆ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಕೋಲಿನ **ಟ** ತುದಿ ಬಿಂದುವಿನ ಕಡೆಗೆ ಎತ್ತರಿಸುತ್ತ ನೋಡುವನು. ಅಂದರೆ ∠ **ಹನಟ** ದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಮೇಲೆ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಅಥವಾ ಉನ್ನತವಾಗಿ ಎತ್ತರಿಸಬೇಕಾಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ∠ **ಹನಟ** ಇದಕ್ಕೆ **ನ** ದಿಂದ **ಟ** ದ ಕಡೆಯ **ಉನ್ನತಿದರ್ಶಕ ಕೋನ** ಇಲ್ಲವೆ **ಉನ್ನತ ಕೋನ** (Angle of elevation) ಅನ್ನುವರು.



ನಿರೀಕ್ಷಕನು ಶಿಖರದ ಮೇಲೆ **ನ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಅವನು ಮೊದಲು ತನ್ನ ದುರ್ಬೀಣ ಯಂತ್ರವನ್ನು **ನಹ** ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರಕ್ಕೆ ಹಚ್ಚುವನು. ಆ ಮೇಲೆ ಅವನು ಆ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿ ನಿಂತ **ಜ** ಎಂಬಲ್ಲಿಯ ಹಡಗದ ಕಡೆಗೆ ಇಳಿಸುತ್ತ ಇಳಿಸುತ್ತ ಅಥವಾ ಅವನತ ಮಾಡುತ್ತ ನೋಡುವನು. ಆದ್ದರಿಂದ **ಹನಜ** ಕೋನಕ್ಕೆ **ನ** ದಿಂದ **ಜ** ದ ಕಡೆಯ **ಅವನತ ದರ್ಶಕ ಕೋನ** ಅಥವಾ **ಅವನತ ಕೋನ** (Angle of depression) ಅನ್ನುವರು.



ಉನ್ನತ ಕೋನವನ್ನಾಗಲಿ, ಅವನತ ಕೋನವನ್ನಾಗಲಿ ಇವೆರಡನ್ನು **ಕ್ಷಿತಿಜ** ಸಮಾಂತರ ದಿಶೆಯಿಂದ ಅಳೆಯಬೇಕಾಗುವದು. ಆಗ ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿಯ **ಅನಜ** ಕೋನಕ್ಕೆ ಹಡಗದ ಅವನತ ಕೋನವೆಂದು ಹೇಳ

ಬಾರದು. ಇದನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಿರಿ. ಯಾಕೆಂದರೆ ಇಂಥ ತಪ್ಪು ಹಲವು ಸಾರೆ ಸಂಭವಿಸುವದುಂಟು.

ಉನ್ನತ ಕೋನವನ್ನೂ, ಅವನತ ಕೋನವನ್ನೂ ಅಳೆದು ನೋಡಲಿಕ್ಕೆ **ಥಿಯೋಡೋಲಾಯಿಟ** (Theodolite) ಹೆಸರಿನ ಕೋನ ಮಾಪಕ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವರು. ಹಿಂದೆ ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ವಿಭಾಗದ (೧೨೬) ಪುಟದಲ್ಲಿ ಈ ಯಂತ್ರದ (ಸಕಾಲಕ್ಕೆ ಕೆಲಸ ಕೊಡುವ ಯಂತ್ರದ) ಮಾಪರಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ವಿವರಣೆಯಿದೆ.

೬. ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸುವರು, ಎಂಬುದು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವದು.

ಉದಾ. ೧:—ನ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಕೋಲಿನ ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು ೫೦° ಇದೆ. **ನ** ಸ್ಥಳವು ಕೋಲಿನಿಂದ ೨೦ ಫೂಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆಯೂ, ನೆಲದಿಂದ ೫ ಫೂಟು ಎತ್ತರದ ಮೇಲೆಯೂ ಇರುವದು. ಆದರೆ, ಕೋಲಿನ ಉದ್ದಳತೆಯೆಷ್ಟು? [ಮೇಲಿನ ೫ನೆಯ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]

$\angle$ **ಹನಟ** = ೫೦°, **ನಹ** = ೨೦ ಫೂಟು.

ಮೊದಲು **ಹಟ** ಇದರ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಹಟ/**ನಹ** = ಸ್ಪ $\angle$ **ಹನಟ** = ಸ್ಪ ೫೦° = ೧·೧೯೧೮ (ಕೋಷ್ಟಕ)

$\therefore$ **ಹಟ** = ೧·೧೯೧೮ **ನಹ** = ೧·೧೯೧೮ × ೨೦ = ೨೩·೮೩೬ ಫೂಟು

$\therefore$ ಕೋಲಿನ ಉದ್ದಳತೆ = **ಹಟ** + ೫ **ಫೂಟು** = ೨೮·೮೩೬ ಫೂಟು.

ಉದಾ. ೨:—ನ ಎಂಬ ನಿರೀಕ್ಷಕನು ಸಮುದ್ರ ಸಪಾಟಿಯಿಂದ ೨೦೦ ಫೂಟು ಎತ್ತರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿಯ **ಜ** ಹಡಗದ ಅವನತ ಕೋನವು ೪೬° ಇದೆ. ಇದರಿಂದ ಹಡಗದ ಮತ್ತು ನಿರೀಕ್ಷಕನ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

[ಮೇಲಿನ ೫ನೆಯ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿಯ ಎರಡನೆಯ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]

ನ ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬ ರೇಖೆಯು, **ಜ** ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗೆ **ಅ** ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. **ನಅ** = ೨೦೦ ಫೂಟು ಮತ್ತು

∠ **ಹನಸ** = ಅವನತಕೋನ = ೪೬°. ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ **ಜಅ** ದ ಅಂತರವನ್ನು ಹೇಳಬೇಕಾಗಿದೆ.

[ಸರ್ವಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಅಂಶಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಅಜ್ಞಾತ ಅಂತರವನ್ನೂ, ಛೇದಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಜ್ಞಾತ ಅಂತರವನ್ನೂ ಬರೆದು, ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ **ಜಅ** ಇದು ಅಜ್ಞಾತ ಅಂತರವಿದೆ; ಮತ್ತು **ನಅ** ಇದು ಜ್ಞಾತ ಅಂತರವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಜಅ**/**ನಅ** ಈ ಗುಣೋತ್ತರದ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ.]

$$\frac{\text{ಜಅ}}{\text{ನಅ}} = \frac{\angle \text{ಜನಅ ದ ಎದುರಿನ ಭುಜ}}{\angle \text{ಜನಅ ದ ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜ}} = \text{ಸ್ಪ} \angle \text{ಜನಅ}.$$

$$= \text{ಸ್ಪ} (೯೦° - \angle \text{ಹನಜ}) = \text{ಸ್ಪ} (೯೦° - ೪೬°)$$

$$= \text{ಸ್ಪ}\ ೪೪° = \cdot೯೬೫೭$$

∴ **ಜಅ** = ೯೬೫೭ × **ನಅ** = ·೯೬೫೭ × ೨೦೦ = ೧೯೩·೧೪ ಫೂಟು.

∴ ಇಷ್ಟು ಅಂತರ ೧೯೩·೧೪ ಫೂಟು ಇದೆ.

ಉದಾ. ३:—ಹಿಂದಿನ ೧ ನೆಯ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಸೂರ್ಯನ ಉನ್ನತ ಅಂಶ ೬೦° ಇದ್ದು, ತಂತಿಯ ಕಂಬದ ನೆರಳು ೧೨ ಫೂಟು ಇದೆ. ಆದರೆ ಆ ಕಂಬವು ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ?

ಟಫ/**ಫಸ** = ಸ್ಪ ∠ **ಟಸಫ** = ಸ್ಪ ೬೦° = ೧·೭೩೨೧.

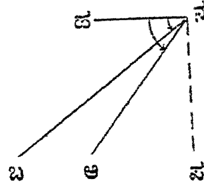
∴ **ಟಫ** = ೧·೭೩೨೧ × **ಫಸ** = ೧·೭೩೨೧ × ೧೨ = ೨೦·೭೮೪ ಫೂಟು.

∴ ತಂತಿಯ ಕಂಬದ ಇಷ್ಟು ಎತ್ತರ ಸುಮಾರು ೨೦·೮ ಫೂಟು ಇರುವದು.

ಉದಾ. ೪:—ಒಬ್ಬ ನಿರೀಕ್ಷಕನು ೮೦ ಫೂಟು-ಎತ್ತರವಿದ್ದ ಒಂದು ಭವ್ಯ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವನು. ಅವನು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿರುವ **ಅ** ಮತ್ತು **ಬ** ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ವಸ್ತುಗಳ ಅವನತ ಕೋನದಲ್ಲಿ ನಿರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವನು. ಆ ಕೋನಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೫೦° ३೬′ ಮತ್ತು ३೫° ೨೦′ ಆಗುವವು. ಆದರೆ ಅವೆರಡು ವಸ್ತುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು? ನಿರೀಕ್ಷಕನಿಂದ ತೆಗೆದ ಲಂಬ ರೇಖೆಯು, **ಅಬ** ದಿಂದ ಕ್ಷಿತಿಜ

ಸಮಾಂತರ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದ ರೇಖೆಗೆ **ಪ** ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು; ಮತ್ತು **ಪ, ಅ, ಬ** ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವವು.

ನಹ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಅಂದರೆ, $\angle$ **ಹನಅ** = ೫೦° ೩೭′

ಮತ್ತು $\angle$ **ಹನಬ** = ೩೫° ೨೦′

ಮತ್ತು **ನಪ** = ೮೦ ಫೂಟು.

ಇಷ್ಟ ರೇಖೆ **ಅಬ** = **ಪಬ** − **ಪಅ**

∴ **ಪಬ, ಪಅ** ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯೋಣ.

ಪಬ/ನಪ = ಸ್ಪ $\angle$ **ಪನಬ** = ಸ್ಪ (೯೦° − $\angle$ ಹನಬ)

= ಸ್ಪ (೯೦° − ೩೫° ೨೦′)

= ಸ್ಪ ೫೪° ೪೦′ = ೧·೪೧೦೫.

∴ **ಪಬ** = ೧·೪೧೦೫ × **ನಪ**

ಪಅ/ನಪ = ಸ್ಪ $\angle$ **ಪನಅ** = ಸ್ಪ (೯೦° − $\angle$ ಹನಅ)

= ಸ್ಪ (೯೦° − ೫೦° ೩೭′) = ಸ್ಪ ೩೯° ೨೩′.

= ·೮೨೧೪.

∴ **ಪಅ** = ·೮೨೧೪ × **ನಪ**

∴ **ಅಬ** = **ಪಬ** − **ಪಅ** = (೧·೪೧೦೫ − ·೮೨೧೪) **ನಪ.**

= ·೫೮೯೧ × ೮೦ = ೪೭·೧೨೮೦ ಫೂಟು.

∴ ಇಷ್ಟ ಅಂತರ ೪೭·೧೨೮ ಫೂಟು ಇದೆ.

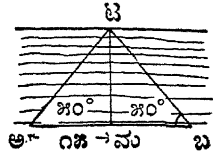
ಉದಾ. ೫:—ಸಣ್ಣದೊಂದು ಹಳ್ಳದ ಒಂದು ದಂಡೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಮರವಿದೆ. ಹಳ್ಳದ ಇನ್ನೊಂದು ದಂಡೆಯ ಮೇಲೆ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ನಿಂತಿರುವನು. ಆ ಮನುಷ್ಯನ ಮತ್ತು ಮರದ ನಡುವಿನ ರೇಖೆಯು ಆವನು ನಿಂತ ದಂಡೆಗೆ (ರೇಖೆಗೆ) ೫೦° ಕೋನ ಮಾಡಿದೆ. ಆ ಮನುಷ್ಯನು ತಾನಿದ್ದ ದಂಡೆಯ ಮೇಲೆಯೇ ೩೦ ಯಾರ್ಡ ನಡೆದು ಹೋದನು. ಅವನು ಹೋಗಿ ನಿಂತ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿಯೂ ಮರದ ಮತ್ತು ದಂಡೆಯ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ

ಪುನಃ ೫೦° ಕೋನ ಆಗುವದು. ಆದರೆ ಆ ಹಳ್ಳದ ಅಗಲಳತೆಯನ್ನು ಎರಡು ದಶಾಂಶ ಸ್ಥಳಗಳ ವರಗೆ ಸರಿ ಬರುವಂತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

[ಮುಂಬಯಿ ವಿ. ವಿ. ೧೯೩೭]

ಟ ಇದು ಮರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳವು. **ಅ** ಮತ್ತು **ಬ** ಇವು ಮನುಷ್ಯನು ನಿಂತ ಸ್ಥಳಗಳು. **ಅಬ**=೩೦ ಯಾರ್ಡ, ಮತ್ತು ∠ **ಟಅಬ** = ∠ **ಟಬಅ** = ೫೦°.

ಟಮ ⊥ **ಅಬ** ತೆಗೆಯಿರಿ; ಅಂದರೆ **ಟಮ** ಇದು ಹಳ್ಳದ ಅಗಲಳತೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ರೇಖೆಯಾಗುವದು. △ **ಟಅಬ** ಇದು ಸಮದ್ವಿಭುಜವಾಗಿರುವದರಿಂದ **ಟಮ** ರೇಖೆಯು **ಅಬ** ರೇಖೆಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವದು.



∴ **ಅಮ** = ೧೫ ಯಾರ್ಡು.

ಮಟ/**ಅಮ** = ಸ್ಪ ೫೦° = ೧.೧೯೧೮

∴ **ಮಟ**=೧.೧೯೧೮ **ಅಮ**=೧.೧೯೧೮×೧೫=೧೭.೮೭೭೦ ಯಾರ್ಡ.

∴ ಇಷ್ಟು ಅಗಲಳತೆಯು ಸುಮಾರು ೧೭.೮೮ ಯಾರ್ಡ ಅದೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ತ—೨.

೧. ಒಂದು ಏಣಿಯು (ನಿಚ್ಚಣಿಕೆ) ಗೋಡೆಗೆ ತಾಗಿದೆ. ಅದರ ಕಾಲುಗಳು ಗೋಡೆಯಿಂದ ೮ ಫೂಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿವೆ. ಮತ್ತು ಅದು ನೆಲಕ್ಕೆ ೬೫° ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಆದರೆ ಆ ಏಣಿಯು ತಾಗಿದ ಗೋಡೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದ ಮೇಲಿರುವದು ?

೨. ಗೋಡೆಗೆ ೨೦ ಫೂಟು ಎತ್ತರದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಏಣಿಯ ತುದಿಯು ತಾಗಿದೆ. ಮತ್ತು ಅದರ ಕಾಲುಗಳು ಗೋಡೆಯಿಂದ ೯ ಫೂಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿವೆ. ಆದರೆ ಆ ಏಣಿಯು ನೆಲಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಅಂಶದ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವದೆಂಬದನ್ನು ಕಲೆ ಯ ವರೆಗೆ ಸರಿಯಾಗಿರುವ ಮಾನವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. ಒಂದು ಭವ್ಯ ಕಟ್ಟಡದ ಶಿಖರದ್ದು ಅದರ ತಳಬದಿಯು ೧೨೦ ಫೂ. ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು ೬೭° ೨೮′ ಆಗುವಂತೆ ಇದೆ. ಆದರೆ ಆ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು? [ಮುಂ. ವಿ. ವಿ. ೧೯೩೬]

೪. ೭೦ ಫೂಟು ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ದೀಪಗೃಹದ ಮೇಲೆ ನಿಂತು ಒಬ್ಬ ನಿರೀಕ್ಷಕನು ೧೫° ಅವನತ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹಡಗವನ್ನು ಕಂಡನು. ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇದರದೊಂದು ಆಕೃತಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ದೀಪಗೃಹ ಮತ್ತು ಹಡಗ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಕೋಷ್ಟಕದ ಉಪಯೋಗ ವನ್ನು ಮಾಡಿ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯಿಂದ ಈ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ತುಲನೆ ಮಾಡಿರಿ. [ಮುಂ. ವಿ. ವಿ. ೧೯೩೬]

೫. ೧೦ ಫೂಟು ಉದ್ದವಾದ ಒಂದು ಕೋಲಿನ ನೆರಳು ೮ ಫೂಟು ಬಿದ್ದಿರುವದು. ಆಗಿನ ಸೂರ್ಯನ ಉನ್ನತಾಂಶವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ೧೨೦ ಫೂಟು ಎತ್ತರದ ಒಂದು ಭವ್ಯ ಕಟ್ಟಡವಿದೆ. ಸೂರ್ಯನ ಉನ್ನತಾಂಶವು ೨೦° ರಿಂದ ೩೨° ರ ವರೆಗೆ ಬೆಳೆಯುವದು. ಆ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಡದ ನೆರಳು ಎಷ್ಟು ಫೂಟುಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವದು ?

೭. ಒಂದು ಭವ್ಯ ಕಟ್ಟಡವು ೧೨೦ ಫೂಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದೆ. ಅಲ್ಲಿಂದ ೭೫ ಫೂಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಮರವಿದೆ. ಕಟ್ಟಡದ ಶಿಖರದಿಂದ ಮರದ ತುದಿಯ ಅವನತ ಕೋನವು ೫೦° ಇದೆ. ಆದರೆ ಆ ಮರದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು ?

೮. ೫೦ ಫೂಟು ಎತ್ತರದ ಒಂದು ದೀಪಗೃಹದ ಮೇಲೆ ನಿಂತ ನಿರೀಕ್ಷಕನು ಎರಡು ಹಡಗುಗಳ ಅವನತ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡನು; ಅವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೨೦° ಮತ್ತು ೩೫° ಇರುವವು. ಹಡಗಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ರೇಷೆಯು, ದೀಪಗೃಹದ ತಳದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು. ಆದರೆ ಹಡಗುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ ಎಷ್ಟು ?

೯. ಸಪಾಟ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಅ ಮತ್ತು ಬ ಎರಡು ಸ್ಥಳಗಳಿಂದ, ೮೦ ಫೂಟು ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡದ ಶಿಖರದ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೩೬° ಮತ್ತು ೫೦° ಇರುವವು. ಅಬ ರೇಷೆಯು (ಬೆಳಿಸದೆ) ಕಟ್ಟಡದ ತಳದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗು ವದು. ಆದರೆ ಅ ಮತ್ತು ಬ ಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವೆಷ್ಟು ?

***೧೦.** ಒಂದು ಹೊಳೆಯ ಪಾತ್ರದ ಅಗಲಳತೆ ನೋಡಲಿಕ್ಕೆಂದು ನಾನು ಅದರ ಒಂದು ದಂಡೆಯ ಮೇಲೆ ಅ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಬ ದ ವರೆಗೆ ೧೨೦ ಯಾರ್ಡ ನಡೆದು ಹೋದೆನು. ಹೊಳೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ದಂಡೆಯ ಮೇಲೆ ಕ ಎಂಬದೊಂದು ಬಿಂದು ವಿದೆ; ಕಅಬ, ಕಬಅ ಇವೆರಡು ಕೋನಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೪೫° ಮತ್ತು ೩೫° ಇರುವವು. ಇದರಿಂದ ಆ ಹೊಳೆಯ ಪಾತ್ರದ ಅಗಲಳತೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

*೧೧. ಒಂದು ಭವ್ಯ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲೊಂದು ಪತಾಕೆಯಿದೆ. ಕಟ್ಟಡದ ೧೫೦ ಫೂಟು ಎತ್ತರದ ಮೇಲಿಂದ, ಪತಾಕೆಯ ಕೋಲಿನ ತಳ ಮತ್ತು ತುದಿ ಇವುಗಳ ಉನ್ನತಕೋನಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೩೨° ೨೪′ ಮತ್ತು ೩೮° ೪೦′ ಇರುವವು. ಅದರೆ ಕಟ್ಟಡ ಮತ್ತು ಪತಾಕೆಯ ಕೋಲು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

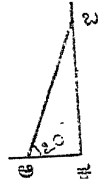
*೧೨. ಸಮುದ್ರದ ದಂಡೆಯ ಮೇಲೆ ಅ ಮತ್ತು ಬ ಇವೆರಡು ಸ್ಥಳಗಳಿವೆ. ಕ ಹಡಗವು ಆ ದ ಕಡೆಗೆ ಬರುತ್ತಲಿದೆ. ಕಅ ರೇಖೆಯು ಅಬಕ್ಕೆ ಲಂಬದಲ್ಲಿದೆ. ಬ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ನಿರೀಕ್ಷಕನಿರುವನು. ಅವನು ೫ ಮಿನಿಟುಗಳ ಅಂತರದಿಂದ ಎರಡು ಸಾರೆ ಕಬಅ ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆದು ನೋಡಿದನು. ಆಗ ಅದು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೫೨° ಮತ್ತು ೩೨° ೨೪′ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬಂತು. ಅ, ಬ ಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ೧½ ಮೈಲು ಇದೆ. ಆದರೆ ಆ ಕ ಹಡಗದ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು ಮೈಲು ?

೩ನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಕೋಜ್ಯಾ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು

೭. ಜ್ಯಾ ಇದು ಗುಣೋತ್ತರವು.

ಪ್ರಶ್ನೆ:—೨೫ ಫೂಟು ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಏಣಿಯು, ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗೋಡೆಗೆ ತಾಗಿದೆ. ಮತ್ತು ಅದು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಪಾತಳಿಗೆ ೭೦°ದ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವದು. ಆದರೆ ಆ ಏಣಿಯು ತಾಗಿದಷ್ಟು ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದಳತೆಯೆಷ್ಟು?



ಅಬ ಏಣಿಯು = ೨೫ ಫೂಟು; ∠**ಬಅಕ** = ೭೦°
ಬಕ ಎತ್ತರವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರದ ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

$$\frac{\text{ಬಕ (ಅಜ್ಞಾತ)}}{\text{ಅಬ (ಜ್ಞಾತ)}}; \quad \text{ಅಂದರೆ} \quad \frac{\angle \text{ಅ ಎದುರಿನ ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$$

ಈ ಗುಣೋತ್ತರದ ಬೆಲೆಯು ∠ಅ ದ ಆಕಾರ ಮಾನದ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವದು. ಹಿಂದಿನ ಪುಟ (೨೮೪) ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳ ಸಲುವಾಗಿ **ಕ**, **ಕ′**, **ಕ″** ಹೀಗೆ ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪ ಇರುವವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{\text{ವ}}{\text{ಕ}} = \frac{\text{ವ}'}{\text{ಕ}'} = \frac{\text{ವ}''}{\text{ಕ}''} = \ldots\ldots\ldots$$ ಮೊದಲಾದ ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು ಬರುವವು.

ವಿರುದ್ಧ ಭುಜ ಮತ್ತು ಕರ್ಣ ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ **ಜ್ಯಾ** (Sine) ಅನ್ನುವರು. '∠ಅ ಇದರ ಜ್ಯಾ' ಎಂದು ಹೇಳುವಾಗ 'ಜ್ಯಾ ಅ' (Sin A) ಎಂದು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವರು.

ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 'ಜ್ಯಾ' ಎಂಬ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. 'ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾ' ಎಂಬ ಗುಣೋತ್ತರ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ನೋಡುವಂತೆ ಜ್ಯಾದ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ನೋಡಬೇಕು.

ಇದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ,

ಬಕ/ಅಬ = ಜ್ಯಾ ಅ = ಜ್ಯಾ ೭೦° = ·೯೩೯೭

∴ **ಬಕ** = ·೯೩೯೭ **ಅಬ** = ·೯೩೯೭ × ೨೫

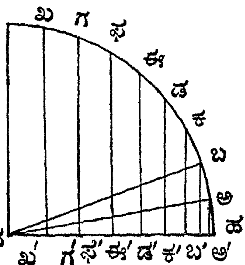
= ೨೩·೪೯೨೫

∴ ಏಣಿ ತಾಗಿದಷ್ಟು ಗೋಡೆಯ ಭಾಗದ ಉದ್ದಳತೆಯು ಸುಮಾರು ೨೩½ ಫೂಟು ಇರುವದು.

ಕೋನದ ಜ್ಯಾ = $\frac{\text{ವಿರುದ್ಧ ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$

೮. ಜ್ಯಾ ಇದರ ಸ್ಥೂಲಮಾನದ ಕೋಷ್ಟಕವು.

ಒಂದು ಇಂಚು ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ತುಳದ ಪಾದ (¼ ಭಾಗ)ವನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ; ಇದರಲ್ಲಿ **ವ** ಕೇಂದ್ರವಿದೆ. ಮತ್ತು **ವಹ** ಇದು ವರ್ತುಳ ಪಾದದ ಸೀಮಾ ದರ್ಶಕ ತ್ರಿಜ್ಯವಿದೆ. ಕೋನ ಮಾಪಕದಿಂದ **ಹವಅ, ಹವಬ, ಹವಕ** .... ಕೋನಗಳನ್ನು ೧೦°, ೨೦°, ೩೦°, ... ಹೀಗೆ ಆಕೃತಿ ಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ವಹ** ದ ಮೇಲೆ **ಅಅ′, ಬಬ′, ಕಕ′**........ ಲಂಬಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಅವುಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ನೋಡಿರಿ. **ವಅ, ವಬ, ವಕ** .... ಇವು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರುವದರಿಂದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಒಂದು ಇಂಚು ಉದ್ದವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,



ಜ್ಯಾ ೧೦° = **ಅಅ′/ವಅ** = **ಅಅ′** = ·೧೭

ಜ್ಯಾ ೨೦° = **ಬಬ′/ವಬ** = **ಬಬ′** = ·೩೪

ಜ್ಯಾ ೩೦° = **ಕಕ′/ವಕ** = **ಕಕ′** = ·೫೦

ಇತ್ಯಾದಿ

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಹೊರಡುವದು:—

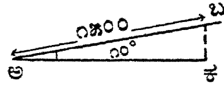
ಕೋನ	೧೦°	೨೦°	೩೦°	೪೦°	೫೦°	೬೦°	೭೦°	೮೦°	೯೦°
ಜ್ಯಾ	·೧೭	·೩೪	·೫೦	·೬೪	·೭೭	·೮೭	·೯೪	·೯೮	೧·೦೦

ಕೋನವು ೦° ದಿಂದ ೯೦° ವರೆಗೆ ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತ ಹೋದಂತೆ, ಆ ಕೋನದ ಜ್ಯಾ ೦ ದಿಂದ ೧ ರ ವರೆಗೆ ಬೆಳೆಯುವದು. ಕೋನವು ದೊಡ್ಡದಾದಂತೆ ಲಂಬದ ಎತ್ತರವೂ ಬೆಳೆಯುವದು; ಮತ್ತು ಕೋನವು ೯೦° ಆದಾಗ ಲಂಬವು ಕರ್ಣದಷ್ಟು ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ೯೦° ಕೋನದ ಜ್ಯಾ ೧ ಬರುವದು.

೯. ಕೋಜ್ಯಾ ಇದು ಗುಣೋತ್ತರವು.

ಪ್ರಶ್ನ:—೧೦° ಏರು ಇರುವ ಮಾರ್ಗದ ಮೇಲಿಂದ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ೧೫೦೦ ಯಾರ್ಡುಗಳ ವರೆಗೆ ನಡೆದು ಹೋದನು. ಆದರೆ ಆವೆರಡು ಸ್ಥಳಗಳ ನಡುವಿನ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರದ ಉದ್ದಳತೆಯೆಷ್ಟು?

ಅ ಮತ್ತು **ಬ** ಇವು ಆ ಮನುಷ್ಯನ ಆರಂಭದ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನಗಳು. **ಅ** ದಿಂದ ಹೊರಟ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ **ಬಕ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಅಬ=೧೫೦೦ ಯಾರ್ಡು; ∠ **ಬಅಕ** =೧೦°; **ಅಕ** ದ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ಹೇಳಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಅಕ/ಅಬ ಅಂದರೆ, ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜ ಮತ್ತು ಕರ್ಣ ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಈ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ **ಕೋಜ್ಯಾ** ಅಥವಾ **ಕೋಟಿಜ್ಯಾ** ಗುಣೋತ್ತರವೆಂದೆನ್ನುವರು. ∠ ಅ ದ ಕೋಜ್ಯಾ ಇದನ್ನು **ಕೋಜ್ಯಾ ಅ** ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವರು.

ಹಿಂದಿನ ೮ ನೆಯ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ,

ಕೋಜ್ಯಾ ೧೦° = ಕೋಜ್ಯಾ ∠ **ಹವಅ** = **ವಅ′/ವಅ** = **ವಅ′** = ·೯೮

∴ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯ **ಅಕ/ಅಬ** = ಕೋಜ್ಯಾ ೧೦° = ·೯೮

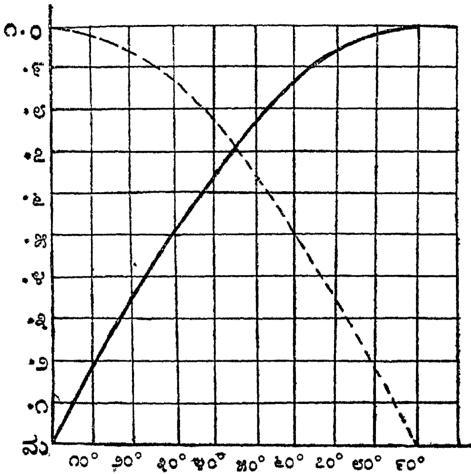
∴ **ಅಕ**=·೯೮ **ಅಬ**=·೯೮×೧೫೦೦=೧೪೭೦ ಯಾರ್ಡು ಸುಮಾರು.

ಅಕ ರೇಷೆಯು **ಅಬ** ರೇಷೆಯ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ **ಪ್ರಕ್ಷೇಪ** (Projection) ಇದೆ; ಎಂಬದು ಸಹಜ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವದು. ಕೋಜ್ಯಾ ಎಂಬ ಗುಣೋತ್ತರವು ತಿರಪು ರೇಷೆಯ ಪ್ರಕ್ಷೇಪವನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾಗ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವದು.

೮ ನೆಯ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿಯ ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಕೋಜ್ಯಾ ಗುಣೋತ್ತರದ ಸ್ಥೂಲಮಾನದಿಂದ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು. ಉದಾ:— ಕೋಜ್ಯಾ ೧೦° = **ವಅ′**; ಕೋಜ್ಯಾ ೨೦° = **ವಬ**′ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಕೋನವು ಸಣ್ಣ ಸಣ್ಣದಾಗುತ್ತ ನಡೆದಂತೆ ಅದರ ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜ ಮತ್ತು ಕರ್ಣ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಕಡಿಮೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು. ಮತ್ತು ಕೋನ ೦° ಆದಾಗ ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜವು ಕರ್ಣದಷ್ಟು ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೋಜ್ಯಾ ೦° ಇದರ ಬೆಲೆ ೧ ಎಂದು ಹಿಡಿಯುವರು. ಕೋನವು ೦° ರಿಂದ ೯೦° ರ ವರೆಗೆ ದೊಡ್ಡದಾದಂತೆ ಕೋಜ್ಯಾ ೧ ರಿಂದ ೦ ದ ವರೆಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು.

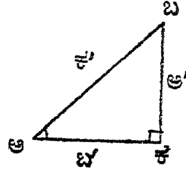
ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಕೋಜ್ಯಾ ಇವುಗಳ ಆಲೇಖವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದರಲ್ಲಿ ಅಖಂಡ ಗೆರೆಯು ಜ್ಯಾ ಎಂಬ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನೂ, ಖಂಡ ಖಂಡ ಗೆರೆಯು ಕೋಜ್ಯಾ ಎಂಬ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನೂ ತೋರಿಸುವವು.



ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಕೋಜ್ಯಾ ಇವುಗಳ ಆಲೇಖವು

೧೦. ಕೋಜ್ಯಾ ಇದು ಕೋಟಿಕೋನದ ಜ್ಯಾ ಇರುವದು.

ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ∠**ಕ** ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.



ಆದ್ದರಿಂದ ∠ಅ + ∠ಬ = ೯೦°;

ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ ಅ = ಅ'/ಕ' = ಕೋಜ್ಯಾ ಬ.

ಮತ್ತು ಕೋಜ್ಯಾ ಅ = ಬ'/ಕ' = ಜ್ಯಾ ಬ.

ಅಂದರೆ ಕೋನದ ಜ್ಯಾ = ಕೋಟಿಕೋನದ ಕೋಜ್ಯಾ;

ಮತ್ತು ಕೋನದ ಕೋಜ್ಯಾ = ಕೋಟಿಕೋನದ ಜ್ಯಾ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೋಜ್ಯಾ ತೆಗೆಯಲಿಕ್ಕೆ ಜ್ಯಾ ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೋಜ್ಯಾದ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿಲ್ಲ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:—ಹಲಕೆಲವು ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಕೋಜ್ಯಾದ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಕಂಡುಬರುವವು. ಕೋನವು ೧° ರಿಂದ ೯೦° ವರೆಗೆ ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತ ಹೋದಂತೆ ಕೋಜ್ಯಾ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಬರುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೋಜ್ಯಾ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ನೋಡುವಾಗ 'ನಡುವಿನ ಅಂತರಗಳನ್ನು' ವಜಾ ಮಾಡಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

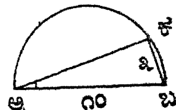
೧೧. ಮಾದರಿಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳು :—

ಉದಾ. ೧:—ಕೋಜ್ಯಾ ೪೧° ೧೮' ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಕೋಜ್ಯಾ ೪೧° ೧೮' = ಜ್ಯಾ (೯೦° − ೪೧° ೧೮') = ಜ್ಯಾ ೪೮° ೪೨'
= ·೭೫೧೩.

ಉದಾ. ೨:—ಜ್ಯಾ ·೩ ಇರುವ ಕೋನವನ್ನು ಭೂಮಿತಿಯಿಂದ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಅಬ ರೇಷೆಯನ್ನು ೧೦ ಸೆ. ಮಿ. ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಅಬ** ವ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಬ** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ೩ ಸೆ. ಮಿ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ, ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದ **ಕ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಕಂಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅಕ, ಬಕ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ ∠ಅ ಇದು ಇಷ್ಟಕೋನ ಆಗುವದು.

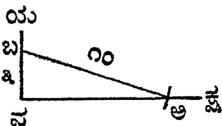


∠ಕ ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಕೋನ ಇರುವದರಿಂದ ಕಾಟಕೋನವಾಗಿದೆ; ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ ಅ = **ಬಕ**/**ಅಬ** = ೩/೧೦ = ·೩.

ಇದೇ ಕೋನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೆಗೆಯಬಹುದು.

ಕ್ಷವಯ ಕಾಟಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

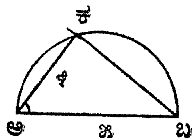
ವಯ ದಲ್ಲಿ ೩ ಸೆ. ಮಿ. ದಷ್ಟು **ವಬ** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಬ** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ೧೦ ಸೆ. ಮಿ. ತ್ರಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಕಂಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ವಕ್ಷ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಅ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಅಬ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ **ವಅಬ** ಇದು ಇಷ್ಟ ಕೋನ ಆಗುವದು. ಯಾಕೆಂದರೆ,



ಜ್ಯಾ ∠**ವಅಬ** = **ವಬ**/**ಅಬ** = ೩/೧೦ = ·೩.

ಉದಾ. ೩:— ಕೋಜ್ಯಾ ೩/೫ ಇರುವಂಥ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

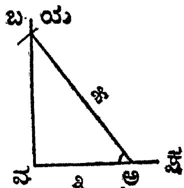
ಮೊದಲನೆಯ ರೀತಿ: ೫ ಸೆ. ಮಿ. **ಅಬ** ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಅಬ** ವ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ಅ** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ೩ ಸೆ. ಮಿ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ತುಳಕಂಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳ ಪರಿಘವನ್ನು **ಕ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಕಅ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ, **ಕಅಬ** ಇಷ್ಟ ಕೋನ ಆಗುವದು.



ಬಕ ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ∠**ಕ** ಇದೊಂದು ಕಾಟ ಕೋನವಾಗುವದು.

ಮತ್ತು ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ** = **ಅಕ**/**ಅಬ** = ೩/೫.

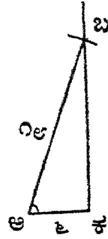
ಎರಡನೆಯ ರೀತಿ: **ಕ್ಷವಯ** ಇದೊಂದು ಕಾಟಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. **ವಕ್ಷ**ದಲ್ಲಿ ೩ ಸೆ. ಮಿ. **ವಅ** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. **ಅ** ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ೫ ಸೆ. ಮಿ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ವರ್ತುಳಕಂಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು **ವಯ** ರೇಖೆಯನ್ನು **ಬ** ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. **ಅಬ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ, **ವಅಬ** ಇದು ಇಷ್ಟಕೋನವಾಗುವದು. ಯಾಕೆಂದರೆ,



ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ** = **ವಅ**/**ಅಬ** = ೩/೫.

ಉದಾ. ೪:—೧೮ ಫೂಟು ಉದ್ದವಾದ ಒಂದು ಏಣಿ ಇದೆ. ಅದರ ಕಾಲುಗಳನ್ನು ಗೋಡೆಯಿಂದ ೬ ಫೂಟು ಅಂತರ ಮೇಲಿಟ್ಟು, ತುದಿಯನ್ನು ಗೋಡೆಗೆ ತಾಗಿಸಿದೆ. ಅದರ ಅದು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಪಾತಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂಶದ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವದೆಂಬದನ್ನು, ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿರಿ.

[ಮು. ವಿ. ವಿ.]



ಅಬ ರೇಷೆಯು ಏಣಿಯನ್ನೂ, ಬಕ ರೇಷೆಯು ಗೋಡೆಯನ್ನೂ ತೋರಿಸುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ,

ಕೋಜ್ಯಾ ಅ = ಅಕ/ಅಬ = ೬/೧೮ = $\frac{೧}{೩}$ = ·೩೩೩೩

ಈಗ ·೩೩೩೩ = ಜ್ಯಾ ೧೯° ೨೮′ = ಕೋಜ್ಯಾ ೭೦° ೩೨′.

∴ ∠ ಅ = ೭೦° ೩೨′

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ತ. ೩.

೧. ಕೋಷ್ಟಕಗಳಿಂದ ಜ್ಯಾ ೧೫° ೩೪′ ಮತ್ತು ಕೋಜ್ಯಾ ೩೭° ೪೮′ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೨. ಜ್ಯಾ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ೧೫°, ೩೪° ೮′, ೭೦° ೪೮′ ಇವುಗಳ ಕೋಜ್ಯಾ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩. $\frac{೧}{೨}$, $\frac{೪}{೫}$, ·೬೪೩೫, ·೮೨೪೧ ಜ್ಯಾ ಇರುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕೋನಗಳನ್ನು (೧ ಕಲೆವರೆಗೆ ಸರಿ ಬರುವಂತೆ) ತೆಗೆಯಿರಿ.

೪ $\frac{೨}{೩}$, $\frac{೫}{೭}$, ·೪೩೮೧, ·೫೭೯೩ ಕೋಜ್ಯಾ ಇರುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕೋನಗಳನ್ನು (೧ ಕಲೆವರೆಗೆ ಸರಿ ಬರುವಂತೆ) ತೆಗೆಯಿರಿ.

೫. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ೧೦ ಇಂಚು, ಮತ್ತು ಶಿರೋಕೋನವು ೪೦° ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು ?

೬. ೫ ಇಂಚು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆಯು ಪರಿಘದಿಂದ ೨೫° ದ ಕೋನ ಮಾಡುವದು. ಆದರೆ ಅದರ ಉದ್ದಳತೆ ಎಷ್ಟು ?

[ಅಬ ಜ್ಯಾ ರೇಷೆ, ಮತ್ತು ವ ಕೇಂದ್ರ ಇದ್ದಾಗ △ ಅವಬ ಇದರ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ.]

೭. ಒಂದು ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವು ೮ ಇಂಚು, ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿಯ ಲಘುಕೋನವು ೪೨° ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಕರ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಉದ್ದಳತೆಯೆಷ್ಟು?

೮. ಜ್ಯಾ ೭/೨೫ ಇರುವ ಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೯. ಒಂದು ಏರಿಕೆಯ ಮಾರ್ಗವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಪಾತಳಿಗೆ ೮° ಕೋನ ಮಾಡಿ, ೧೫೦ ಯಾರ್ಡ್ ದೂರ ಹೋಗಿದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸ್ಥಳದ ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬವೆಷ್ಟು?

೧೦. ೨೦ ಫೂಟು ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಏಣಿಯನ್ನು ಗೋಡೆಯ ತಳದಿಂದ ೬ ಫೂಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಗೋಡೆಗೆ ತಾಗಿಸಿಟ್ಟಿದೆ. ಆದರೆ ಅದು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಪಾತಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂಶದ ಕೋನ ಮಾಡುವದೆಂಬದನ್ನು ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಕೋಷ್ಟಕ ನೋಡಿ ಹೇಳಿರಿ.

೧೧. ಅಬ = ೩ ಇಂಚು, ಬಕ = ೨.೮ ಇಂಚು, ಮತ್ತು ∠ಬ ಇದರ ಕೋಜ್ಯಾ ೩/೫ ಇರುವಂಥ ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಬಕದ ಮೇಲೆ ಅ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೆಗೆದ ಲಂಬವು ಪದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ, ಬಪ, ಪಅ, ಅಕ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. [ಮು. ವಿ. ವಿ. ೧೯೩೬]

೧೨. ೪ ಸೆ. ಮಿ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ೭ ಸೆ. ಮಿ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾಗ ನೀವು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ರಚನೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ; ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. [ಮು. ವಿ. ವಿ. ೧೯೩೬]

೧೩. ೧೮ ಫೂಟು ಎತ್ತರವಾದ ಒಂದು ಕಂಬವಿದೆ. ಅದರ ತುದಿಯಿಂದ ೨ ಫೂಟು ಕೆಳಗಡೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ೨೭ ಫೂಟು ಉದ್ದವಿರುವ ತಂತಿಯನ್ನು ತೊಡಕಿಸಿದೆ. ಆ ತಂತಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯನ್ನು ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿಸಿದೆ. ಆದರೆ ಅದು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟು ಅಂಶದ ಕೋನ ಮಾಡುವದು?

೧೪. ಅಬ, ಅಕ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯು √೩ ಇದೆ. ಅಬ ಇದು ೫ ಫೂಟು ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಅಕದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕ್ಷೇಪವೆಷ್ಟು?

೧೫. ಸಮ ಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ್ದೊಂದು ಭುಜವು ಅ ಫೂಟು ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $\frac{೧}{೪}\sqrt{೩}ಅ^{೨} = .೪೩೩ಅ^{೨}$ ಚೌ. ಫೂ. ಆಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

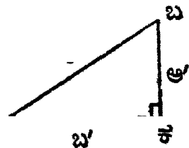
೪ ನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದು

೧೨. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಎಂದರೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅಳತೆಯ ಶಾಸ್ತ್ರ. ತ್ರಿಕೋನ ರಚನೆಗೆ ಯಾವ ಯಾವ ಭಾಗಗಳ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇರುವದೆಂಬ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಾವು ಈ ಮೊದಲೇ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಕೊಟ್ಟ ಭಾಗಗಳಿಂದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ಹೇಳ ಬಹುದು. ಆದರೆ ಎಷ್ಟು ಕಾಳಜಿ ಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ದಾಗ್ಯೂ, ಅದರ ಅಳತೆಯನ್ನು ಸ್ಥೂಲಮಾನದಿಂದಲೇ ಹೇಳಬೇಕಾಗುವ ದೆಂಬದು ಅನುಭವಸಿದ್ಧ ಮಾತು. ತ್ರಿಕೋನದ ಗೊತ್ತಿದ್ದ ಭಾಗಗಳ ಅಳತೆಯ **ಗಣಿತವನ್ನು** ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಆಧಾರದಿಂದ ತೆಗೆಯಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಯಮಾನದಿಂದ ಅದರ ಅಜ್ಞಾತ ಭಾಗಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕೆ **ತ್ರಿಕೋನ ಬಿಡಿಸುವದು** (Solving a triangle) ಅನ್ನುವರು.

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೇವಲ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಚಾರವನ್ನಷ್ಟೇ ಮಾಡೋಣ. **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\angle$ **ಕ** ಇದು ಕಾಟಕೋನವಿದೆ. **ಬಕ, ಕಅ, ಅಬ** ಭುಜಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಅ′, ಬ′, ಕ′** ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು $\angle$ **ಅ**, $\angle$ **ಬ**, $\angle$ **ಕ** ಇವುಗಳ ಬಧಲು ಕೇವಲ **ಅ, ಬ, ಕ** ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ಪ್ರಕಾರದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕಾಗುವದು:—

(೧) **ಕ′**, ಅ′ ಕೊಟ್ಟರೆ ತ್ರಿಕೋನ ಬಿಡಿಸುವದು.
(೨) ಅ′, ಬ′ ,, ,, ,,
(೩) **ಕ′**, ಅ ,, ,, ,,
(೪) ಅ′, ಅ ,, ,, ,,

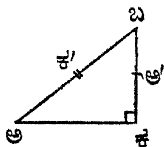


ಈ ಮಾದರಿಯ ಎಷ್ಟೋ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಈ ಮೊದಲು ಬಿಡಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಆದರೆ ಈಗ ಇವುಗಳನ್ನೇ ಒಳ್ಳೆಯ ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಬಿಡಿಸುವ ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

೧೩. ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದು

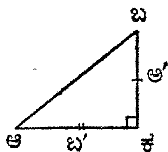
(೧) ಕ' ಕರ್ಣವನ್ನೂ, ಅ' ಒಂದು ಭುಜವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿವೆ. ಜ್ಯಾಅ = ಅ'/ಕ' ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಅ ಗೊತ್ತಾಗುವದು. ಬ = ೯೦° − ಅ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಬ ಗೊತ್ತಾಗುವದು. ಬ' = ಕ' ಜ್ಯಾ ಬ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಬ' ಗೊತ್ತಾಗುವದು. ಅಥವಾ ಬ' = √(ಕ'² − ಅ'²) ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಬ' ಗೊತ್ತಾಗುವದು.



ಇದರಲ್ಲಿ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ' ಮತ್ತು ಅ' ಕೊಟ್ಟದ್ದು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಉಳಿದ ಮೂರು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ ಅ, ಬ, ಬ' ಇವುಗಳನ್ನು ಗಣಿತದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿದೆವು.

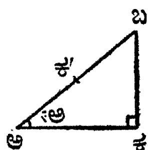
(೨) ಅ' ಮತ್ತು ಬ' ಭುಜಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದುಂಟು.

ಸ್ಪ ಅ = ಅ' / ಬ' ದಿಂದ ಅ ತಿಳಿಯುವದು.
ಬ = ೯೦° − ಅ ,, ಬ ,,
ಕ' = √(ಅ'² + ಬ'²) ,, ಕ' ,,
ಅಥವಾ ಅ'/ಕ' = ಜ್ಯಾ ಅ
∴ ಕ' − ಅ'/(ಜ್ಯಾ ಅ) ದಿಂದ ಕ' ,,



(೩) ಕ' ಕರ್ಣವನ್ನೂ, ಅ ಲಘುಕೋನವನ್ನೂ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಬ = ೯೦° − ಅ ದಿಂದ ಬ ತಿಳಿಯುವದು.
ಅ' = ಕ' ಜ್ಯಾ ಅ ,, ಅ' ,,
ಬ' = ಕ' ಜ್ಯಾ ಬ ,, ಬ' ,, ಅಥವಾ
ಬ' = √(ಕ'² − ಅ'²) ದಿಂದ ಬ' ,,



(೪) ಅ′ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು, ಅ ಲಘುಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿವೆ.

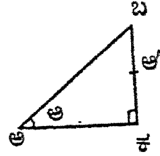
ಬ $=$ ೯೦° $-$ ಅ ದಿಂದ ಬ ತಿಳಿಯುವದು.

ಬ′ $=$ ಅ′ ಸ್ಪ ಬ ,, ಬ′ ,,

ಕ′ $=$ $\sqrt{}$(ಅ′^೨ + ಬ′^೨) ದಿಂದ ಕ′ ,,

ಅ′/ಕ′ $=$ ಜ್ಯಾ ಅ

$\therefore$ ಕ′ $=$ ಅ′/(ಜ್ಯಾ ಅ) ದಿಂದ ಕ′ ,,



೧೪. ಮಾದರಿಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳು:—

ಉದಾ. ೧:—ಕ = ೯೦°, ಕ′ = ೧೧೦ ಫೂಟು; ಅ′ = ೪೫ ಫೂಟು ಇವರ ಮೇಲಿಂದ Δ **ಅಬಕ** ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಜ್ಯಾ ಅ = ಅ′/ಕ′ = ೪೫/೧೧೦ – ·೪೦೯೧;

$\therefore$ ಅ = ೨೪° ೯′.

ಬ = ೯೦° – ಅ = ೬೫° ೫೧′.

ಬ′/ಕ′ = ಜ್ಯಾ ಬ; $\therefore$ ಬ′ = ಕ′ ಜ್ಯಾ ಬ = ೧೧೦ × ·೯೧೨೫
= ೧೦೦·೩೭೫೦ ಫೂಟು.

$\therefore$ ಅ = ೨೪° ೯′; ಬ = ೬೫° ೫೧′; ಬ′ = ೧೦೦·೪ ಫೂಟು.

ತುಲನೆ:—ತುಲನೆಗಾಗಿ ಬ′ ಭುಜವನ್ನು ಬ′ = $\sqrt{}$(ಕ′^೨ – ಅ′^೨) ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ತೆಗೆಯೋಣ.

ಕ′^೨ – ಅ′^೨ = ೧೧೦^೨ – ೪೫^೨ = (೧೧೦ + ೪೫) (೧೧೦ – ೪೫).
= ೧೫೫ × ೬೫ = ೧೦೦೭೫;

$\therefore$ ಬ′ = ೧೦೦·೩ ಫೂಟು.

ಉದಾ. ೨:—ಕ = ೯೦°, ಅ′ = ೩೧ ಫೂ., ಬ′ = ೨೭ ಫೂ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ Δ **ಅಬಕ** ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಸ್ಪ ಅ = ಅ′/ಬ′ = ೩೧/೨೭ = ೧·೧೪೮೧, $\therefore$ ಅ = ೪೮° ೫೭′.

ಬ = ೯೦° – ಅ = ೪೧° ೩′.

ಕ′ = $\sqrt{}$(ಅ′^೨ + ಬ′^೨) = $\sqrt{}$(೯೬೧ + ೭೨೯) = $\sqrt{}$(೧೯೬೦) = ೪೧·೧೧.

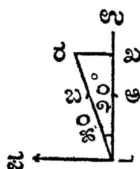
$\therefore$ ಅ = ೪೮° ೫೭′; ಬ = ೪೧° ೩′; ಕ′ = ೪೧·೧೧ ಫೂಟು.

ತುಲನೆ:—ಅ′/ಕ′ = ಜ್ಯಾ ಅ $\therefore$ ಕ′ = ಅ′/ಜ್ಯಾ ಅ = ೩೧/·೭೭೪೨
= ೪೧·೧.

ಉದಾ. ೩ :—ಒಂದು ಬಂದರದಿಂದ ಒಂದೇ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಎರಡು ಹಡಗಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಡೆಗೆ ಹೊರಟವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಅ ಹಡಗವು ಉತ್ತರ ದಿಕ್ಕಿಗೆ, ಬ ಹಡಗವು ಉ೨೦° ಪ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ನಡೆದವು. ಬ ಹಡಗವು ೫೦ ಮೈಲು ದೂರ ಹೋದ ಮೇಲೆ ಅದರ ಪೂರ್ವಕ್ಕೆ ಅ ಹಡಗವು ಬರುವದು. ಆದರೆ ಆಗಿನ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ. ಮತ್ತು ಬಂದರದಿಂದ ಅದ ಅಂತರವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಮ ಇದು ಬಂದರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳ; ರ ಇದು ಬ ಹಡಗವು ೫೦ ಮೈಲು ಹೋದ ನಂತರದ ಸ್ಥಳ; ಮತ್ತು ಖ ಇದು ಆಗಿನ ಅ ಹಡಗದ ಸ್ಥಳ.

$\angle$ **ಮಖರ** ಇದು ಕಾಟಕೋನವಾಗಿದೆ. **ರಖ, ಮಖ** ಇವುಗಳ ಅಂತರದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಿದೆ.



ರಖ/ಮರ = ಜ್ಯಾ ೨೦°

∴ **ರಖ** = **ಮರ** ಜ್ಯಾ ೨೦° = ೫೦ × ·೩೪೨೦೦

= ೧೭·೧ ಮೈ.

ಮಖ/ಮರ = ಕೋಜ್ಯಾ ೨೦°

∴ **ಮಖ** = **ಮರ** ಕೋಜ್ಯಾ ೨೦°.

= ೫೦×·೯೩೯೭=೪೬·೯೮೫ ಮೈ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೪.

ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ; ಎಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ $\angle$ ಕ = ೧ ಕಾಟಕೋನ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

೧. ಅ′ = ೫, ಕ′ = ೮.   ೨. ಅ′ = ೪೩, ಕ′ = ೭೫.

೩. ಬ′ = ೧೨, ಕ′ = ೩೦.   ೪. ಬ′ = ೩೭೫, ಕ′ = ೮೦೦.

೫. ಅ′ = ೮, ಬ′ = ೧೨.   ೬. ಅ′ = ೪೨೫, ಬ′ = ೭೫೦.

೭. ಕ′ = ೨೦, ಅ = ೨೦°   ೮. ಕ′ = ೪೦೦, ಬ = ೪೦° ೩೦′

೯. ಅ′ = ೮೦, ಬ = ೩೪° ೮′.   ೧೦. ಅ′ = ೫೨೫, ಅ = ೬೮°

೧೧. ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ವ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ೩.೫ ಇಂಚು ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಪ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ವರ್ತುಳ ತ್ರಿಜ್ಯವು ೨ ಇಂಚು ಇದ್ದರೆ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದಳತೆ ಎಷ್ಟು? ಮತ್ತು ಅದು ವಪ ಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಅಂಶದ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವದು?

೧೨. △ ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ ∠ ಅ = ೫೦°, ಬಕ = ೪ ಇಂಚು. ಇದರಿಂದ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯ (circumradius) ತೆಗೆಯಿರಿ.

[ವ ಪರಿಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ತಿಳಿದು △ ವಬಕ ಬಿಡಿಸಿರಿ.]

೧೩. ಅ ಮತ್ತು ಬ ಇವರು ಕ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಒಂದೇ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಡೆಗೆ ಹೊರಡುವರು. ಅ ನು ತಾಸಿಗೆ ೩ ಮೈಲಿನಂತೆ ಉ. ೩೫° ಪ. ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಹೋದನು; ಮತ್ತು ಬ ನು ತಾಸಿಗೆ ೩½ ಮೈಲಿನಂತೆ ಉ. ೫೫° ಪೂ. ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಹೋದನು. ಆದರೆ ಎರಡು ತಾಸುಗಳ ನಂತರ ಅವರಿಬ್ಬರ ನಡುವಿನ ಅಂತರ ಎಷ್ಟಾಗುವದು ಎಂಬದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ; ಮತ್ತು ಅಬಕ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಹೇಳಿರಿ.

೧೪. ಪೂರ್ವ-ಪಶ್ಚಿಮವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಅ ಮತ್ತು ಬ ಎರಡು ಸ್ಥಳಗಳು ೫೦೦ ಯಾರ್ಡ ಅಂತರದ ಮೇಲಿವೆ. ಕ ಎಂಬ ಶಾಲೆಯ ಸ್ಥಳವು ಅ ದಿಂದ ಉ. ೩೦° ಪೂ. ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ, ಮತ್ತು ಬ ದಿಂದ ಉ. ೬೦° ಪ. ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಶಾಲೆಯು ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು? [ಮೊದಲು ಅಕ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.]

***೧೫.** ಒಂದು ದಿನ್ನೆಯ ಎತ್ತರವು ೩೦೦ ಫೂಟು ಇದೆ. ಅಲ್ಲಿಂದ ಸರಿಯಾಗಿ ಪೂರ್ವಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಾವಿರ ಯಾರ್ಡು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಹಡಗವು ಕಾಣುವದು. ಅಲ್ಲಿಂದ ಆ ಹಡಗವು ಸರಿಯಾಗಿ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ೫೦೦ ಯಾರ್ಡ ಹೋದ ಬಳಿಕ, ಆ ಹಡಗದಿಂದ ದಿನ್ನೆಯ ಶಿಖರದ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಎಷ್ಟಾಗುವದು?

೫ ನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಕೆಲವು ವಿಶಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

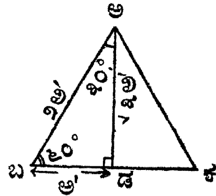
೧೫. ೩೦°, ೪೫°, ೬೦° ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು.

(೧) ಅಬಕ ಇದೊಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. ಅಡ ⊥ ಬಕ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಬ = ೨ ಅ′ ತಕ್ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅಂದರೆ, ∠ ಬಅಡ = ೩೦°, ∠ ಅಬಡ ೬೦°, ಮತ್ತು ∠ ಅಡಬ = ೧ ಕಾಟಕೋನ. ಬಡ = ಅ′; ಮತ್ತು ಅಡ = √(ಅಬ^{೨} − ಬಡ^{೨}) = √೩ ಅ′.

∴ ಜ್ಯಾ ೩೦° = ಬಡ/ಅಬ
= ಅ′/೨ ಅ′ = ೧/೨.

ಕೋಜ್ಯಾ ೩೦° = ಅಡ/ಅಬ
= √೩ ಅ′/೨ ಅ′
= √೩/೨

ಸ್ಪ ೩೦° = ಬಡ/ಅಡ = ಅ′/√೩ ಅ′
= ೧/√೩.



ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ ೬೦° = ಅಡ/ಅಬ
= √೩ ಅ′/೨ ಅ′.
= √೩/೨.

ಕೋಜ್ಯಾ ೬೦° = ಬಡ/ಅಬ = ಅ′/೨ ಅ′
= ೧/೨.

ಸ್ಪ ೬೦° = ಅಡ/ಬಡ = √೩ ಅ′/ಅ′
= √೩

(೨) **ಅಬಕ** ಇದೊಂದು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ∠ **ಕ** = ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ, ∠ **ಅ** = ∠ **ಬ** = ೪೫°.

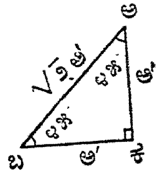
ಅಕ = **ಬಕ** = **ಅ′**; ಅಂದರೆ **ಅಬ**² = **ಅಕ**² + **ಬಕ**² = ೨ **ಅ′**²

∴ **ಅಬ** = √೨ **ಅ′**

∴ ಜ್ಯಾ ೪೫° = **ಅ′**/ √೨ **ಅ′** = ೧/ √೨

ಕೋಜ್ಯಾ ೪೫° = **ಅ′**/ √೨ **ಅ′** = ೧/ √೨.

ಸ್ಪ ೪೫° = **ಅ′**/**ಅ′** = ೧.



ಈ ಕಲಮಿನಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಒಂದೆಡೆಗೆ ಕೂಡಿಸಿ ಬದಿಯ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಹಿಂದಿನ ೧೦ನೆಯ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿಯ ಕೋಟಿ ಕೋನಗಳ ಗುಣೋತ್ತರದಿಂದ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಇದರಲ್ಲಿ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

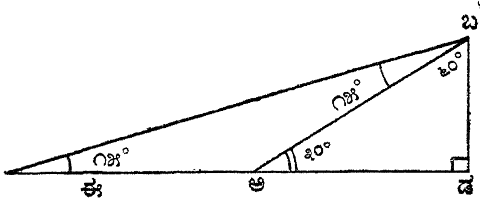
	ಜ್ಯಾ	ಕೋಜ್ಯಾ	ಸ್ಪ.
೩೦°	೧/೨	√೩/೨	೧/√೩
೬೦°	√೩/೨	೧/೨	√೩
೪೫°	೧/√೨	೧/√೨	೧

***೧೬. ೦°, ೧೫°, ೨೨½°, ೬೭½°, ೭೫°, ೯೦° ಈ ಕೋನಗಳ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು.**

[ಇದು ಮುಂಬಯಿ ವಿದ್ಯಾ ಖಾತೆಯ ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ.]

(೧) ೧೫ ನೆಯ ಕಲಮಿನಂತೆ △ **ಅಬಡ** ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಅರ್ಧಭಾಗ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ; ಅದರಲ್ಲಿ ∠ **ಬಅಡ** = ೩೦°, ∠ **ಅಬಡ** = ೬೦°, ∠ **ಡ** = ೧ ಕಾಟಕೋನ.

ಅಬ ಮತ್ತು ಅಈ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಡಅ ರೇಖೆಯನ್ನು ಈ ವರೆಗೆ ಬೆಳೆಸಿರಿ. ಬಈ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ, ∠ ಅಬಈ = ∠ ಅಈಬ = ೧/೨ ∠ ಡಅಬ = ೧೫°.



∴ **ಈಬಡ** ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ∠ **ಈ** = ೧೫° ∠ **ಈಬಡ** = ೭೫° ಮತ್ತು ∠ **ಡ** = ೯೦°

ಅದರಂತೆ, **ಅಬ** = ೨ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

ಬಡ = ೧, **ಈಡ** = **ಈಅ** + **ಅಡ** = **ಅಬ** + **ಅಡ** = ೨ + √೩

ಮತ್ತು **ಈಬ**² = **ಈಡ**² + **ಬಡ**² = (೨ + √೩)² + ೧² = ೮ + ೪ √೩

∴ **ಈಬ** = √(೮ + ೪ √೩) ಆದ್ದರಿಂದ,

ಜ್ಯಾ ೧೫° = ಕೋಜ್ಯಾ ೭೫° = **ಬಡ**/ **ಈಬ** = ೧/ √ (೮ + ೪ √೩);

ಕೋ ಜ್ಯಾ ೧೫° = ಜ್ಯಾ ೭೫° = **ಈಡ**/ **ಈಬ** = (೨+ √೩)/ √ (೮+೪ √೩).

ಸ್ಪ ೧೫° = **ಬಡ**/**ಈಡ** = ೧/(೨ + √೩) = (೨ − √೩)/(೪ − ೩).

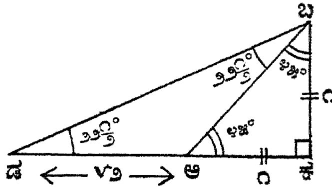
= ೨ − √೩.

ಸ್ಪ ೭೫° = **ಈಡ**/**ಬಡ** = (೨ + √೩)/೧ = ೨ + √೩.

(೨) ೧೫ನೆಯ ಕಲಮಿನಂತೆ **ಅಬಕ** ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಅದರಲ್ಲಿ ∠ **ಕ** = ೯೦°, ∠ **ಅ** = ∠ **ಬ** = ೪೫°.

ಅಬ ದಷ್ಟು ಅಡ ಆಗುವಂತೆ ಕಅ ರೇಖೆಯನ್ನು ಡ ವರೆಗೆ ಬೆಳೆಸಿರಿ. ಬಡ ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಅಂದರೆ,



$\angle\,\text{ಅಬಡ} = \angle\,\text{ಅಡಬ} = \frac{1}{2}\angle\,\text{ಬಅಕ} = \text{೨೨}\tfrac{1}{2}^\circ$

$\angle\,\text{ಡಬಕ} = \angle\,\text{ಡಬಅ} + \angle\,\text{ಅಬಕ} = \text{೬೭}\tfrac{1}{2}^\circ$

ಆದರಂತೆ ಅಕ = ಬಕ = ೧ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$\text{ಅಬ} = \text{ಅಡ} = \sqrt{\text{೨}}$, $\text{ಡಕ} = \sqrt{\text{೨}} + \text{೧}$ ಮತ್ತು

$\text{ಡಬ}^{\text{೨}} = \text{ಡಕ}^{\text{೨}} + \text{ಬಕ}^{\text{೨}} = (\sqrt{\text{೨}} + \text{೧})^{\text{೨}} + \text{೧}^{\text{೨}} = \text{೪} + \text{೨}\sqrt{\text{೨}}$;

ಆದ್ದರಿಂದ $\text{ಡಬ} = \sqrt{(\text{೪} + \text{೨}\sqrt{\text{೨}})}$.

$\therefore$ $\text{ಜ್ಯಾ }\text{೨೨}\tfrac{1}{2}^\circ = \text{ಕೋಜ್ಯಾ }\text{೬೭}\tfrac{1}{2}^\circ = \text{ಬಕ}/\text{ಬಡ} = \text{೧}/\sqrt{(\text{೪} + \text{೨}\sqrt{\text{೨}})}$.

$\text{ಕೋಜ್ಯಾ }\text{೨೨}\tfrac{1}{2}^\circ = \text{ಜ್ಯಾ }\text{೬೭}\tfrac{1}{2} = \text{ಡಕ}/\text{ಬಡ}$

$= (\sqrt{\text{೨}} + \text{೧})/\sqrt{(\text{೪} + \text{೨}\sqrt{\text{೨}})}$.

$\text{ಸ್ಪ }\text{೨೨}\tfrac{1}{2}^\circ = \text{ಬಕ}/\text{ಡಕ} = \text{೧}/(\sqrt{\text{೨}} + \text{೧}) = (\sqrt{\text{೨}} - \text{೧})/(\text{೨} - \text{೧})$

$= \sqrt{\text{೨}} - \text{೧}$.

$\text{ಸ್ಪ }\text{೬೭}\tfrac{1}{2}^\circ = \text{ಡಕ}/\text{ಬಕ} = (\sqrt{\text{೨}} + \text{೧})/\text{೧} = \sqrt{\text{೨}} + \text{೧}$.

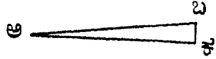
ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡ ಬಹುದು.

$\text{ಸ್ಪ }\text{೧೫}^\circ = \text{೨} - \sqrt{\text{೩}}$; $\text{ಸ್ಪ }\text{೭೫}^\circ = \text{೨} + \sqrt{\text{೩}}$;

$\text{ಸ್ಪ }\text{೨೨}\tfrac{1}{2}^\circ = \sqrt{\text{೨}} - \text{೧}$; $\text{ಸ್ಪ }\text{೬೭}\tfrac{1}{2}^\circ = \sqrt{\text{೨}} + \text{೧}$.

*(೩) **ಅಬಕ** ಇದೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ, ∠**ಕ** ಇದು ಕಾಟಕೋನವಿದೆ; ∠**ಅ** ಇದು ತೀರ ಸಣ್ಣ ಕೋನವಿದೆ; ಮತ್ತು ∠**ಬ** ಇದು ತೀರ ದೊಡ್ಡದು ಅಂದರೆ ಸುಮಾರು ೯೦° ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪ ದಲ್ಲಿದೆ.

∠**ಅ** ಇದು ಕೊನೆ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ದಾಗುತ್ತ ಹೋದಂತೆ **ಬಕ** ರೇಖೆಯು ಸಣ್ಣ–ಸಣ್ಣದಾಗುತ್ತ ಕೊನೆಗೆ ೦ ಆಗು ವದು. ಮತ್ತು **ಅಕ** ರೇಖೆಯು **ಅಬ** ದಷ್ಟು ಆಗುವದು. ಅಂದರೆ ಅಂತಿಮ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ,



ಜ್ಯಾ **ಅ** = ಕೋಜ್ಯಾ **ಬ** = **ಬಕ**/**ಅಬ,** ಇದರಿಂದ

ಜ್ಯಾ ೦° = ಕೋಜ್ಯಾ ೯೦° = ೦. ಮತ್ತು

ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ** = ಜ್ಯಾ **ಬ** = **ಅಕ**/**ಅಬ** ಇದರಿಂದ

ಕೋಜ್ಯಾ ೦° = ಜ್ಯಾ ೯೦° = ೧.

ಸ್ಪ **ಅ** = **ಬಕ**/**ಅಕ** ಇದರಿಂದ ಸ್ಪ ೦° = ೦. ಮತ್ತು

ಸ್ಪ **ಬ** = **ಅಕ**/**ಬಕ** ಇದರಿಂದ ಸ್ಪ ೯೦° = ∞.

[ಇಲ್ಲಿ ∞ ಈ ಚಿಹ್ನವನ್ನು "ಕಡೆಗೆ ಹೋಗಿದೆ" ಎಂಬರ್ಥದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.]

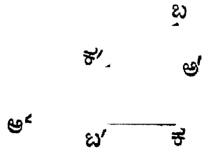
೧೭. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು.

△ **ಅಬಕ**ದಲ್ಲಿ ∠**ಕ** = ಒಂದು ಕಾಟ ಕೋನ ಇದ್ದರೆ,

ಜ್ಯಾ **ಅ** = **ಅ**′/**ಕ**′

ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ** = **ಬ**′/**ಕ**′ ಮತ್ತು

ಸ್ಪ **ಅ** = **ಅ**′/**ಬ**′ ಆದ್ದರಿಂದ,



(೧) ಜ್ಯಾ **ಅ**/ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ**

= (**ಅ**′/**ಕ**′)/(**ಬ**′/**ಕ**′) = **ಅ**′/**ಬ**′ = ಸ್ಪ **ಅ** ....(೧)

(೨) ಪಾಯಥಾಗೋರಸ ನಿಯಮದಂತೆ

$$ಅ'^{೨} + ಬ'^{೨} = ಕ'^{೨}$$

$$\therefore \left(\frac{ಅ'}{ಕ'}\right)^{೨} + \left(\frac{ಬ'}{ಕ'}\right)^{೨} = ೧;$$

$$\therefore (ಜ್ಯಾ\ ಅ)^{೨} + (ಕೋಜ್ಯಾ\ ಅ)^{೨} = ೧.$$

ಸುಲಭತೆಯ ಸಲುವಾಗಿ $(ಜ್ಯಾ\ ಅ)^{೨}$ ಇದರ ಬದಲು ಜ್ಯಾ^{೨} ಅ, ಮತ್ತು $(ಕೋಜ್ಯಾ\ ಅ)^{೨}$ ಇದರ ಬದಲು ಕೋಜ್ಯಾ ^{೨} ಅ ಬರೆಯುವರು. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಘಾತಾಂಕೆಗಳನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವರು; ಆದ್ದರಿಂದ,

$$ಜ್ಯಾ^{೨}\ ಅ + ಕೋಜ್ಯಾ^{೨}\ ಅ = ೧ \quad\quad (೨).$$

(೨) ಇದರಿಂದ ಜ್ಯಾ ಅ $= \sqrt{(೧ - ಕೋಜ್ಯಾ^{೨}\ ಅ)}$, ಮತ್ತು ಕೋಜ್ಯಾ ಅ$= \sqrt{(೧ - ಜ್ಯಾ^{೨}\ ಅ)}$ ಹೀಗೆ ಸಮೀಕರಣಗಳುಂಟಾಗುವವು.

ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಪಾಠಮಾಡಿರಿ:—

$$\frac{ಜ್ಯಾ\ ಅ}{ಕೋಜ್ಯಾ\ ಅ} = ಸ್ಪ\ ಅ$$

$$ಜ್ಯಾ^{೨}\ ಅ + ಕೋಜ್ಯಾ^{೨}\ ಅ = ೧$$

$$ಜ್ಯಾ\ (೯೦^{\circ} - ಅ) = ಕೋಜ್ಯಾ\ ಅ$$

$$ಕೋಜ್ಯಾ\ (೯೦^{\circ} - ಅ) = ಜ್ಯಾ\ ಅ.$$

೧೮. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು **ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ** ಇರುವವು; ಅವು ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲವೆಂಬದನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡಿರಿ. ಅದರಂತೆ ಜ್ಯಾ ಅ ಇದು **ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ** ಇರುವದು. ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಅ ಇವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ 'ಜ್ಯಾ^{೨} ಅ' ಇದನ್ನು '೨ ಜ್ಯಾ ಅ' ಹೀಗೆ ಬರೆಯಕೂಡದು; ಅಥವಾ 'ಜ್ಯಾ (ಅ + ಬ)' ಇದನ್ನು 'ಜ್ಯಾ ಅ + ಜ್ಯಾ ಬ' ಹೀಗೆ ಬರೆಯಕೂಡದು. ಉದಾ:—'ಜ್ಯಾ ೬೦$^{\circ}$' ಎಂಬ ಗುಣೋತ್ತರವು '೨ ಜ್ಯಾ ೩೦$^{\circ}$' ರಷ್ಟು ಇಲ್ಲ; ಅಥವಾ 'ಜ್ಯಾ ೭೫$^{\circ}$' ಇದು 'ಜ್ಯಾ ೪೫$^{\circ}$ + ಜ್ಯಾ ೩೦$^{\circ}$' ರಷ್ಟು ಇಲ್ಲ. ಅದರಂತೆ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ ಅಥವಾ ಸ್ಪ ಅ ಇವು

ಒಂದೊಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ. ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣೋತ್ತರವು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬದನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಟ್ಟು, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬೀಜಗಣಿತದ ಎಲ್ಲ ನಿಯಮಗಳು ಹೊಂದುವವೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ಉದಾ:—ಹೇಗೆ, $(\text{ಅ} + \text{ಬ})^{\text{೨}} = \text{ಅ}^{\text{೨}} + \text{೨ ಅಬ} + \text{ಬ}^{\text{೨}}$

ಹಾಗೆ, $(\text{ಜ್ಯಾ ಅ} + \text{ಜ್ಯಾ ಬ})^{\text{೨}} = \text{ಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ} + \text{೨ ಜ್ಯಾ ಅ ಜ್ಯಾ ಬ} + \text{ಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಬ}$; ಎಂದು ಬರೆದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಇಂಥ ಬೀಜಗಣಿತಗಳಲ್ಲಿಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಹೊರತು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಕೇವಲ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಮೇಲಿನ ೧೭ ನೆಯ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ) ಇರುವವು. ಇವೆರಡನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕೆಂಬದನ್ನು ಈಗ ವಿಚಾರಿಸೋಣ.

ಉದಾ. ೧ :—$\text{ಜ್ಯಾ}^{\text{೪}}\text{ ಅ} - \text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{\text{೪}}\text{ ಅ} = \text{ಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ} - \text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ}$ ಎಂಬದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಹೇಗೆ, $\text{ಅ}^{\text{೪}} - \text{ಬ}^{\text{೪}} = (\text{ಅ}^{\text{೨}} - \text{ಬ}^{\text{೨}})(\text{ಅ}^{\text{೨}} + \text{ಬ}^{\text{೨}})$,

ಹಾಗೆ, $\text{ಜ್ಯಾ}^{\text{೪}}\text{ ಅ} - \text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{\text{೪}}\text{ ಅ} = (\text{ಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ} - \text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ})(\text{ಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ} + \text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ})$

ಪರಂತು $\text{ಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ} + \text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ} = \text{೧}$. ಈ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ೧೭ ನೆಯ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\text{ಜ್ಯಾ}^{\text{೪}}\text{ ಅ} - \text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{\text{೪}}\text{ ಅ} = (\text{ಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ} - \text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ}) \times (\text{೧}).$$
$$= \text{ಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ} - \text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ}.$$

ಉದಾ. ೨ :—$\dfrac{\text{೧} - \text{ಸ್ಪ}^{\text{೨}}\text{ ಅ}}{\text{೧} + \text{ಸ್ಪ}^{\text{೨}}\text{ ಅ}} = \text{೨ ಕೋಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ} - \text{೧}$ ಎಂಬದನ್ನು ತೋರಿಸರಿ.

೧೭ ನೆಯ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ $\text{ಸ್ಪ ಅ} = \text{ಜ್ಯಾ ಅ}/\text{ಕೋಜ್ಯಾ ಅ}$. ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿದೆ.

$$\therefore \text{೧} - \text{ಸ್ಪ}^{\text{೨}}\text{ ಅ} = \text{೧} - \frac{\text{ಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ}}{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ}} = \frac{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ} - \text{ಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ}}{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{\text{೨}}\text{ ಅ}};$$

$$\text{ಮತ್ತು } ೧+\text{ಸ್ಪ}^{೨}\,\text{ಅ}=೧+\frac{\text{ಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}}{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}}=\frac{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}+\text{ಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}}{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}}$$

$$=\frac{೧}{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}}$$

$$\therefore \text{ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಬದಿ}=\frac{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}-\text{ಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}}{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}}\Big/\frac{೧}{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}}$$

$$=\frac{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}-\text{ಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}}{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}}\times\frac{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}}{೧}$$

$$=\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}-\text{ಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}.$$

$$\text{ಪರಂತು,}\qquad \text{ಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}=೧-\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}$$

$$\therefore \text{ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಬದಿ}=\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}-(೧-\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ})$$

$$=೨\,\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}-೧$$

$$=\text{ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿ.}$$

ಉದಾ. ೩ :— $(\text{ಜ್ಯಾ}^{೩}\,\text{ಅ}-\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೩}\,\text{ಅ})=(\text{ಜ್ಯಾ ಅ}-\text{ಕೋಜ್ಯಾ ಅ})(೧+\text{ಜ್ಯಾ ಅ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ})$.

$$\text{ಹೇಗೆ,}\quad(\text{ಅ}^{೩}-\text{ಬ}^{೩})=(\text{ಅ}-\text{ಬ})\,(\text{ಅ}^{೨}+\text{ಅಬ}+\text{ಬ}^{೨})$$

$$\text{ಹಾಗೆ,}\quad(\text{ಜ್ಯಾ}^{೩}\,\text{ಅ}-\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೩}\,\text{ಅ})=(\text{ಜ್ಯಾ ಅ}-\text{ಕೋಜ್ಯಾ ಅ})\times(\text{ಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ}+\text{ಜ್ಯಾ ಅ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ}+\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\,\text{ಅ})$$

$$=(\text{ಜ್ಯಾ ಅ}-\text{ಕೋಜ್ಯಾ ಅ})\,(೧+\text{ಜ್ಯಾ ಅ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ}).$$

ಉದಾ. ೪ :—

$$\left.\begin{aligned}\text{ಕ್ಷ}&=\text{ಪ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ ಕೋಜ್ಯಾ ಬ},\\ \text{ಯ}&=\text{ಪ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ ಜ್ಯಾ ಬ},\\ \text{ಝ}&=\text{ಪ ಜ್ಯಾ ಅ}.\end{aligned}\right\}$$

ಹೀಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು $\text{ಕ್ಷ}^{೨}+\text{ಯ}^{೨}+\text{ಝ}^{೨}=\text{ಪ}^{೨}$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

ಕ್ಷ^{೨} + **ಯ**^{೨} = **ಪ**^{೨} ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ಅ ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} **ಬ** + **ಪ**^{೨} ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ಅ ಜ್ಯಾ^{೨} **ಬ**

= ಪ^{೨} ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ಅ (ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ಬ + ಜ್ಯಾ^{೨} ಬ)

= ಪ^{೨} ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ಅ;

∴ ಕ್ಷ^{೨} + ಯ^{೨} + ಝ^{೨} = ಪ^{೨} ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ಅ + ಪ^{೨} ಜ್ಯಾ^{೨} ಅ.

= ಪ^{೨} (ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ಅ + ಜ್ಯಾ^{೨} ಅ)

= ಪ^{೨}.

ಉದಾ. ೫ :—ಜ್ಯಾ ಅ = ೧೨/೧೩ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೋಜ್ಯಾ ಅ ಮತ್ತು ಸ್ಪ ಅ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಅಬಕ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ∠**ಕ** = ೯೦° ಮತ್ತು **ಬಕ** = ೧೨, **ಅಬ** = ೧೩ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ;

ಅಂದರೆ ಜ್ಯಾ **ಅ** = **ಬಕ**/**ಅಬ** = ೧೨/೧೩.

ಇನ್ನು ಪಾಯಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ,

ಅಬ^{೨} = **ಬಕ**^{೨} + **ಅಕ**^{೨}

∴ **ಅಕ**^{೨} = **ಅಬ**^{೨} − **ಬಕ**^{೨} = ೧೩^{೨} − ೧೨^{೨} = ೨೫.

∴ **ಅಕ** = ೫.

∴ ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ** = **ಅಕ**/**ಅಬ** = ೫/೧೩

ಮತ್ತು ಸ್ಪ **ಅ** = **ಬಕ**/**ಅಕ** = ೧೨/೫.



ಇದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೆಗೆಯಬಹುದು:—

ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ** = √(೧ − ಜ್ಯಾ^{೨} ಅ) = (೧−೧೪೪/೧೬೯)

= √(೨೫/೧೬೯) = ೫/೧೩.

ಮತ್ತು ಸ್ಪ ಅ = ಜ್ಯಾ ಅ/ಕೋಜ್ಯಾ ಅ = $\frac{೧೨}{೧೩} \div \frac{೫}{೧೩} = \frac{೧೨}{೧೩} \times \frac{೧೩}{೫} = \frac{೧೨}{೫}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ತ-೫.

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

೧. ಜ್ಯಾ^{೨} ೩೦° + ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ೪೫° = $\frac{೩}{೪}$.

೨. ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ೩೦° + $\frac{೧}{೨}$ ಜ್ಯಾ^{೨} ೪೫° = ೧.

೩. ೪ ಜ್ಯಾ ೩೦° ಕೋಜ್ಯಾ ೩೦° ಜ್ಯಾ^{೨} ೪೫° = ಜ್ಯಾ ೬೦°.

೪. ಜ್ಯಾ ೬೦° ಕೋಜ್ಯಾ ೩೦° + ಕೋಜ್ಯಾ ೬೦° ಜ್ಯಾ ೩೦° = ೧.

೫. ಜ್ಯಾ ೬೦° ಕೋಜ್ಯಾ ೩೦° − ಕೋಜ್ಯಾ ೬೦° ಜ್ಯಾ ೩೦° = $\frac{೧}{೨}$.

೬. ಸ್ಪ^{೨} ೬೦° + ೩ಸ್ಪ^{೨} ೩೦° = ೪.

೭. ೩ಸ್ಪ^{೨} ೪೫° + ಸ್ಪ^{೨} ೬೦° = ೬.

ಅ = ೩೦° ಎಂದು ತಿಳಿದು ಕೆಳಗಿನ ೮ ರಿಂದ ೧೨ ರ, ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ, ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ತಿಳಕೊಳ್ಳಿರಿ:

೮. ಜ್ಯಾ ೨ ಅ = ೨ ಜ್ಯಾ ಅ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ.

೯. ಕೋಜ್ಯಾ ೨ ಅ = ೨ ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ಅ − ೧.

೧೦. $\text{ಸ್ಪ ೨ ಅ} = \frac{\text{೨ ಸ್ಪ ಅ}}{\text{೧} - \text{ಸ್ಪ}^{೨}\text{ ಅ}}$. ೧೧. $\text{ಸ್ಪ ಅ} = \frac{\text{ಸ್ಪ ೨ ಅ} - \text{ಸ್ಪ ಅ}}{\text{೧} + \text{ಸ್ಪ ೨ ಅ ಸ್ಪ ಅ}}$.

೧೨. ಜ್ಯಾ ೨ ಅ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ − ಕೋಜ್ಯಾ ೨ ಅ ಜ್ಯಾ ಅ = ಜ್ಯಾ ಅ.

ಕೆಳಗಿನ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

೧೩. ಕ್ಷ = ೪೫° ಇದ್ದರೆ, ೩ ಜ್ಯಾ^{೨} ಕ್ಷ − ಜ್ಯಾ ಕ್ಷ ಕೋಜ್ಯಾ ಕ್ಷ = ೧.

೧೪ ಕ್ಷ = ೩೦° ಇದ್ದರೆ, ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ಕ್ಷ − ಜ್ಯಾ^{೨} ಕ್ಷ = ಜ್ಯಾ ಕ್ಷ.

೧೫. ಕ್ಷ = ೩೦° ಇದ್ದರೆ, $\sqrt{೩}$ ಕೋಜ್ಯಾ ಕ್ಷ + ಜ್ಯಾ ಕ್ಷ = ೨.

೧೬. ಕ್ಷ = ೬೦° ಇದ್ದರೆ, ಅದರಂತೆ, ಕ್ಷ = ೪೫° ಇದ್ದರೆ,

೪ ಜ್ಯಾ^{೨} ಕ್ಷ ಸ್ಪ ಕ್ಷ + ೩ = ೪ ಜ್ಯಾ^{೨} ಕ್ಷ + ೩ ಸ್ಪ ಕ್ಷ.

ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ:—

೧೭. ಸ್ಪ ಅ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ = ಜ್ಯಾ ಅ.

೧೮. ಜ್ಯಾ ಅ / ಸ್ಪ ಅ = ಕೋಜ್ಯಾ ಅ.

೧೯. $\frac{\text{ಜ್ಯಾ}^{೨}\text{ ಅ}}{\text{೧} - \text{ಕೋಜ್ಯಾ ಅ}} = \text{೧} + \text{ಕೋಜ್ಯಾ ಅ}$.

೨೦. $\frac{\text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\text{ ಅ}}{\text{೧} - \text{ಜ್ಯಾ ಅ}} = \text{೧} + \text{ಜ್ಯಾ ಅ}$.

೨೧. $$\text{ಜ್ಯಾ ಅ ಸ್ಪ ಅ} = \frac{೧ - \text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\text{ ಅ}}{\text{ಕೋಜ್ಯಾ ಅ}}.$$

೨೨. $$\frac{\text{ಕೋಜ್ಯಾ ಅ}}{\text{ಸ್ಪ ಅ}} = \frac{೧ - \text{ಜ್ಯಾ}^{೨}\text{ ಅ}}{\text{ಜ್ಯಾ ಅ}}.$$

೨೩. $$\frac{\text{ಸ್ಪ}^{೨}\text{ ಅ}}{೧ + \text{ಸ್ಪ}^{೨}\text{ ಅ}} = \text{ಜ್ಯಾ}^{೨}\text{ ಅ}.$$

೨೪. $$\frac{೧ - \text{ಸ್ಪ}^{೨}\text{ ಅ}}{೧ + \text{ಸ್ಪ}^{೨}\text{ ಅ}} = \text{ಕೋಜ್ಯಾ}^{೨}\text{ ಅ} - \text{ಜ್ಯಾ}^{೨}\text{ಅ}.$$

೨೫. $$\left(\frac{೧ + \text{ಜ್ಯಾ ಅ}}{\text{ಕೋಜ್ಯಾ ಅ}}\right)^{೨} = \frac{೧ + \text{ಜ್ಯಾ ಅ}}{೧ - \text{ಜ್ಯಾ ಅ}}.$$

೨೬. $$\left(\frac{೧ - \text{ಕೋಜ್ಯಾ ಅ}}{\text{ಜ್ಯಾ ಅ}}\right)^{೨} = \frac{೧ - \text{ಕೋಜ್ಯಾ ಅ}}{೧ + \text{ಕೋಜ್ಯಾ ಅ}}.$$

೨೭. ಜ್ಯಾ ಅ ಕೋಜ್ಯಾ $(೯೦^\circ - \text{ಅ}) +$ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ ಜ್ಯಾ $(೯೦^\circ - \text{ಅ}) = ೧$.

೨೮. ಕೋಜ್ಯಾ $(೯೦^\circ - \text{ಅ})$ ಸ್ಪ $(೯೦^\circ - \text{ಅ}) =$ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ.

೨೯. ಜ್ಯಾ $(೯೦^\circ - \text{ಅ})$ ಕೋಜ್ಯಾ $(೯೦^\circ - \text{ಅ}) -$ ಸ್ಪ ಅ $+$ ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} $(೯೦^\circ - \text{ಅ})$ ಸ್ಪ ಅ $= ೦$.

೩೦. (ಜ್ಯಾ ಅ $-$ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ)$^{೨} = ೧ - ೨$ ಜ್ಯಾ ಅ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ.

೩೧. $೧ -$ ಜ್ಯಾ^{೪} ಅ $= (೧ +$ ಜ್ಯಾ^{೨} ಅ) ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ಅ.

೩೨. $೧ -$ ಕೋಜ್ಯಾ^{೪} ಅ $= (೧ +$ ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ಅ) ಜ್ಯಾ^{೨} ಅ.

೩೩. ಜ್ಯಾ^{೪} ಅ $-$ ಕೋಜ್ಯಾ^{೪} ಅ $= ೧ - ೨$ ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ಅ.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ:—

೩೪. ಸ್ಪ^{೨} $೩೦^\circ + ೪$ ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} $೪೫^\circ +$ ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ೩೦°.

೩೫. ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} $೬೦^\circ +$ ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} $೩೦^\circ +$ ಸ್ಪ^{೨} ೪೫°.

೩೬. ೪ ಜ್ಯಾ ೩೦° ಕೋಜ್ಯಾ ೩೦° ಜ್ಯಾ ೪೫° ಕೋಜ್ಯಾ ೪೫°.

೩೭. ಜ್ಯಾ ಅ $= \frac{೩}{೫}$ ಇದ್ದರೆ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ ಮತ್ತು ಸ್ಪ ಅ.

೩೮. ಕೋಜ್ಯಾ ಅ $= ೧೨/೧೩$ ಇದ್ದರೆ, ಜ್ಯಾ ಅ ಮತ್ತು ಸ್ಪ ಅ.

೩೯. ಜ್ಯಾ ಅ $= ೩/೫$ ಇದ್ದರೆ, ೩ ಜ್ಯಾ ಅ $+$ ೪ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ.

೪೦ ಸ್ಪ ಅ$=೫/೧೨$ ಇದ್ದರೆ, ಜ್ಯಾ ಅ, ಕೋಜ್ಯಾ ಅ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ ಅ (೧ + ಸ್ಪ ಅ)

$$+ \text{ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ } \left(೧ + \frac{೧}{\text{ಸ್ಪ ಅ}}\right) - \frac{೧}{\text{ಕೋಜ್ಯಾ ಅ}}$$

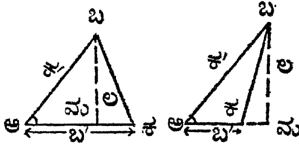
[ಮು. ವಿ. ವಿ. ೧೯೩೭]

೬ ನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಭೂಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಉಪಯೋಗವೂ ಕೆಲವು ಕಠಿಣ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳೂ

೧೯. ಮೊದಲು ಈ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಭೂಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂಬ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(೧) ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ



$\triangle$ ಅಬಕದಲ್ಲಿ ಬ', ಕ' ಮತ್ತು $\angle$ಅ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಇದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಇನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಅಕದ ಮೇಲೆ ಬಮ (= ಲ) ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. 'Δ' ಈ ಚಿಹ್ನವನ್ನು 'ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ' ವೆಂದು ಗುರುತಿಸಿರಿ. $\Delta = \frac{1}{2}$ ಬ'ಲ. ಇದರಲ್ಲಿ ಲದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಭಾಗಗಳಿಂದ ತೆಗೆಯುವದಿದೆ.

ಲ/ಕ' = ಜ್ಯಾ ಅ $\therefore$ ಲ = ಕ' ಜ್ಯಾ ಅ;

$\therefore$ $\Delta = \frac{1}{2}$ ಬ'ಲ $= \frac{1}{2}$ ಬಕ ಜ್ಯಾ ಅ.

$\therefore$ $\Delta = \frac{1}{2}$ ಬ'ಕ' ಜ್ಯಾ ಅ ... . (೧).

ಅಂದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು

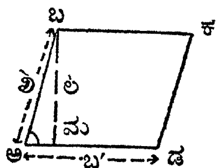
$= \frac{1}{2}$ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಗುಣಾಕಾರ $\times$ ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಕೋನದ ಜ್ಯಾ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ:— ∠ ಅ ಇದು ವಿಶಾಲಕೋನವಿದ್ದರೂ, (೧)ರ ಸೂತ್ರವು ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ವಿಶಾಲಕೋನದ ಜ್ಯಾ ತೆಗೆಯುವದನ್ನು ನಾವು ಈ ವರೆಗೂ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ ಈ ವಿಧಾನದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿಲ್ಲ.

ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಹಿಂದಿನ ೭೮ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು.

(೨) ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

ಅಬಕಡ ಇದೊಂದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇದೆ. **ಬಮ** ⊥ **ಅಡ**; **ಅಬ** = **ಅ′**, **ಅಡ** = **ಬ′**, ∠ **ಡಅಬ** = **ಅ** ಮತ್ತು **ಬಮ** = **ಲ** ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ಸಮಾ. ಭು. ಚೌ. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = **ಬ′ಲ**



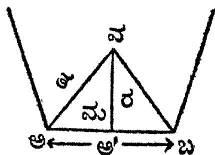
ಪರಂತು, **ಲ**/**ಅ′** = ಜ್ಯಾ **ಅ**

∴ **ಲ** = **ಅ′** ಜ್ಯಾ **ಅ**.

∴ ಸಮಾ. ಚೌ. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜಗಳ ಗುಣಾಕಾರ × ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಕೋನದ ಜ್ಯಾ.

(೩) ಸುಸಮ ಬಹುಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

ನ ಭುಜಗಳ ಒಂದು ಸುಸಮ ಬಹುಕೋನದ **ಅಬ** (= **ಅ′**) ಇದೊಂದು ಭುಜವಿದೆ; ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತದ **ವ** ಕೇಂದ್ರವೂ, **ತ** ತ್ರಿಜ್ಯವೂ ಆಗಿವೆ. **ವಮ** ⊥ **ಅಬ** ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅಂದರೆ, **ಅಮ** = **ಮಬ** = ½ **ಅ′** ಮತ್ತು,



∠ ಅವಬ = $\frac{೧}{ನ}$ (೪ ಕಾಟಕೋನ)

= (೩೬೦/**ನ**)° ಮತ್ತು,

∠ **ಆವಮ** = ½ ∠ ಅವಬ = (೧೮೦/**ನ**)°.

ಅದರಂತೆ, **ವಮ** (= ರ) ಇದೊಂದು ಬಹುಕೋನಾಂತರ್ಗತ ವರ್ತುಳ ತ್ರಿಜ್ಯವಿದೆ. ಈಗ, ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = **ನ** × △ **ಅವಬ** ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ.

[೧] **ತ** ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ,

△ **ಅವಬ** = ೧/೨ **ವಅ · ವಬ** ಜ್ಯಾ ∠ **ಅವಬ** = ೧/೨ **ತ**^{೨} ಜ್ಯಾ (೩೬೦°/**ನ**);

∴ ಬಹುಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ೧/೨ **ನತ**^{೨} ಜ್ಯಾ (೩೬೦°/**ನ**) .... [೧]

[೨] **ಅ′** ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ,

△ **ಅವಬ** = ೧/೨ **ಅಬ · ವಮ**. ಪರಂತು,

ಅಮ/ವಮ = ಸ್ಪ ∠ **ಅವಮ** = ಸ್ಪ (೧೮೦°/**ನ**)

∴ **ವಮ** = **ಅಮ**/ಸ್ಪ (೧೮೦°/**ನ**) = ೧/೨ **ಅಬ**/ಸ್ಪ (೧೮೦°/**ನ**)

∴ △ **ಅವಬ** = ೧/೪ **ಅಬ**^{೨}/ಸ್ಪ (೧೮೦°/**ನ**)

∴ ಬಹುಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ೧/೪ **ನಅ′**^{೨}/ಸ್ಪ (೧೮೦°/**ನ**) .... [೨]

[೩] **ರ** ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ,

△ **ಅವಬ** = ೧/೨ **ಅಬ · ವಮ** = **ಅಮ · ವಮ**.

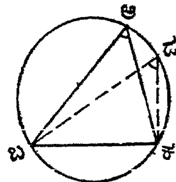
ಪರಂತು, **ಅಮ** = **ವಮ** ಸ್ಪ (೧೮೦°/**ನ**)

∴ △ **ಅವಬ** = **ವಮ**^{೨} ಸ್ಪ (೧೮೦°/**ನ**) = **ರ**^{೨} ಸ್ಪ (೧೮೦°/**ನ**)

∴ ಬಹುಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = **ನರ**^{೨} ಸ್ಪ (೧೮೦°/**ನ**) .... [೩]

(೪) ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾ ನಿಯಮವು

ತ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ **ಬಕ** ಇದೊಂದು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲೆ **ಅ** ಇದೊಂದು ಲಘು ಪರಿಘಕೋನವಿದೆ. **ಬಡ** ವರ್ತುಳ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು **ಡಕ** ಕೂಡಿಸಿರಿ.



ಅಂದರೆ, ∠ **ಬಡಕ** = ∠ **ಬಅಕ** = ∠ **ಅ**;

ಮತ್ತು ∠ **ಬಕಡ** = ೧ ಕಾಟಕೋನ.

∴ ಜ್ಯಾ **ಅ** = ಜ್ಯಾ ∠ **ಬಡಕ** = **ಬಕ/ಬಡ**;

∴ **ಬಕ** = **ಬಡ** ಜ್ಯಾ **ಅ** = ೨**ತ** ಜ್ಯಾ **ಅ**.

∴ **ಬಕ** = ೨ **ತ** ಜ್ಯಾ **ಅ**.

Δ **ಅಬಕ** ಇದು ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ,

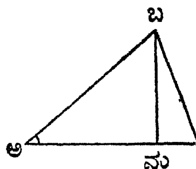
ಅ$'$ = ೨ **ತ** ಜ್ಯಾ **ಅ** ; **ಬ**$'$ = ೨ **ತ** ಜ್ಯಾ **ಬ** ; **ಕ**$'$ = ೨ **ತ** ಜ್ಯಾ **ಕ** ;

$\therefore \dfrac{\text{ಅ}'}{\text{ಜ್ಯಾ ಅ}} = \dfrac{\text{ಬ}'}{\text{ಜ್ಯಾ ಬ}} = \dfrac{\text{ಕ}'}{\text{ಜ್ಯಾ ಕ}} = \text{೨ ತ}.$

ಇದಕ್ಕೆ **ಜ್ಯಾ-ನಿಯಮ** ಎನ್ನುವರು.

(೫) **ಕೋಜ್ಯಾ-ನಿಯಮ**

Δ **ಅಬಕ** ಇದರಲ್ಲಿ $\angle$ ಅ ಲಘುಕೋನ ಇದ್ದರೆ, ಮತ್ತು **ಬಮ** $\perp$ **ಅಕ** ಇದ್ದರೆ, ಪ್ರಮೇಯ ೩೫ ರಂತೆ,



ಬಕ^{೨} = **ಅಬ**^{೨} + **ಅಕ**^{೨} − ೨ **ಅಕ · ಅಮ**

ಪರಂತು **ಅಮ**/**ಅಬ** = ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ** ;

$\therefore$ **ಅಮ** = **ಅಬ** ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ**.

$\therefore$ **ಬಕ**^{೨} = **ಅಬ**^{೨} + **ಅಕ**^{೨}
 − ೨ **ಅಕ · ಅಬ** ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ**.

ಅಂದರೆ, **ಅ**$'^{೨}$ = **ಕ**$'^{೨}$ + **ಬ**$'^{೨}$ − ೨ **ಬ**$'$**ಕ**$'$ ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ**.

ಅಥವಾ **ಅ**$'^{೨}$ = **ಬ**$'^{೨}$ + **ಕ**$'^{೨}$ − ೨ **ಬ**$'$**ಕ**$'$ ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ**.

ಇದಕ್ಕೆ **ಕೋಜ್ಯಾ-ನಿಯಮ** ಅನ್ನುವರು.

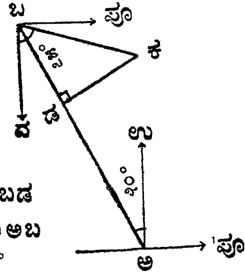
ಟಿಪ್ಪಣಿ:—ಜ್ಯಾ-ನಿಯಮ ಮತ್ತು ಕೋಜ್ಯಾ-ನಿಯಮ ಇವು ಎಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೂ ಉಪಯುಕ್ತವಿರುವವೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

೨೦. ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಕಠಿಣ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ. ಮೊದಲು ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿಯ 'ಹೋಕಾ ಯಂತ್ರ'ದ ೧೬ ಮತ್ತು 'ಸಾಪೇಕ್ಷ ದಿಶೆ'ಯಲ್ಲಿಯ ೯ ನೆಯ ಪ್ರಕರಣ ಇವುಗಳ ವಿಷಯವನ್ನು ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ಚನ್ನಾಗಿ ಮನವರಿಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿರಿ. ನಂತರ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಉದ್ಯುಕ್ತರಾಗಿರಿ.

ಉದಾ. ೧:—**ಅ** ದ **ಉ** ೩೦° **ಪ.** ಕ್ಕೆ **ಬ** ಇದೆ. **ಬ** ದ **ದ** ೭೫° **ಪೂ.** ಕ್ಕೆ ೪ ಮೈಲುಗಳ ಮೇಲೆ **ಕ** ಇದೆ. **ಕಡ** ಇದು **ಅಬ** ದ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಗಣಿತದಿಂದ **ಅಡ** ತೆಗೆಯಿರಿ; (೧ ಮೈಲು = ೧ ಇಂ.) ಈ ಪ್ರಮಾಣ

ದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಕೃತಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು **ಅಡ** ಅಳೆದು ಸರಿ ಇದ್ದದ್ದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. [ಮು. ವಿ. ವಿ. ೧೯೩೬]

[ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಸುಲಭತೆಗಾಗಿ ೨ ಮೈ.=೧ ಇ. ಈ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.]



ಅಉ ಇದು ಉತ್ತರ ದಿಕ್ಕನ್ನು ತೋರಿಸುವದು.

∴ ∠ **ಉಅಬ**=೩೦°; **ಬದ** ಇದು **ಬ** ಇದರ ದಕ್ಷಿಣ ದಿಕ್ಕನ್ನು ತೋರಿಸುವದು.

∴ ∠ **ದಬಕ** = ೭೫°.

∴ ∠ **ಡಬಕ** = ∠ **ದಬಕ** − ∠ **ದಬಡ**

= ∠ **ದಬಕ** − ∠ **ಉಅಬ**

= ೭೫° − ೩೦° = ೪೫°

∴ **ಬಡ**/**ಬಕ** = ಕೋಜ್ಯಾ ೪೫° = ೧/√೨,

∴ **ಬಡ** = **ಬಕ** ೧/√೨ = ೪/√೨

= ೨√೨ = ೨·೮೨೮

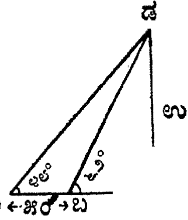
∴ **ಅಡ** = **ಅಬ** − **ಬಡ** = ೮ − ೨·೮೨೮ = ೫·೧೭೨.

∴ ಗಣಿತದಿಂದ **ಅಡ** = ೫·೧೭೨ ಮೈಲು.

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಅಳೆದು ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿದರೆ, **ಅಡ**=೫·೨ ಮೈಲು, ಬರುವದು.

ಉದಾ. ೨ :—ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಒಂದು ಸ್ಥಳದಿಂದ ಒಂದು ಭವ್ಯ ಕಟ್ಟಡದ ಉನ್ನತ ಕೋನ ೪೮° ಇರುವದನ್ನು ಕಂಡನು; ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿಂದ ನಿಡುದಾಗಿ ೫೦ ಫೂಟು ಮುಂದಕ್ಕೆ ನಡೆದುಹೋಗಿ, ಪುನಃ ಆ ಶಿಖರದ ಉನ್ನತ ಕೋನವನ್ನು ನೋಡಿದನು. ಆಗ ಅದು ೬೨° ಇದ್ದದ್ದು ಕಂಡು ಬಂತು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕಟ್ಟಡದ ಶಿಖರವು ನೆಲದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರ ಮೇಲಿದೆ, ಎಂಬದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಕಡ ಇದೊಂದು ಉ ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡವಿದೆ; ಅ ಮತ್ತು ಬ ಇವು ನಿರೀಕ್ಷಕನು ನಿಂತು ನೋಡಿದ ಸ್ಥಾನಗಳು ಇವೆ.



ಅಬ = ಅಕ − ಬಕ.

ಅಕ/ಉ = ಸ್ಪ ∠ ಅಡಕ = ಸ್ಪ (೯೦° − ೪೮°) = ಸ್ಪ ४೨°

∴ ಅಕ = ಉ ಸ್ಪ ४೨° = ಉ × ·೯೦೦४

ಬಕ/ಉ = ಸ್ಪ ∠ ಬಡಕ = ಸ್ಪ (೯೦° − ೬೨°) = ಸ್ಪ ೨೮° = ·೫೩೧೭

∴ ಬಕ = ಉ × ·೫೩೧೭

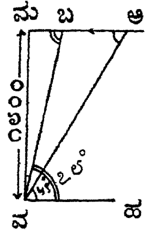
∴ ಅಬ = ಅಕ − ಬಕ = ಉ (·೯೦೦४ − ·೫೩೧೭) = ಉ (·೩೬೮೭)

∴ ಉ = ಅಬ/·೩೬೮೭ = ೫೦/·೩೬೮೭ = ೧೩೬ ಫೂಟು ಸುಮಾರು.

ಉದಾ. ४ :—ಒಂದು ವಿಮಾನವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ೧೮೦೦ ಫೂಟು ಎತ್ತರದ ಮೇಲಿಂದ ೫೯° ಉನ್ನತ ಕೋನ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಹೊರಟಿತು. ಮುಂದೆ ೫ ಸೆಕಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅದರ ಉನ್ನತ ಕೋನವು ೭೮°ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿತು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಆ ವಿಮಾನವು ೫ ಸೆಕಂದಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರ ಹೋಯಿತು, ಮತ್ತು ಅದರ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು? ಎಂಬದನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. [ಮು. ವಿ. ವಿ. ೧೯೩೮]

[೫ ಸೆಕಂದುಗಳ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ವಿಮಾನವು ನಿರೀಕ್ಷಕನ ತಲೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಹೋಗಿಲ್ಲವೆಂದು ಗೃಹೀತ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಅದರಂತೆ ವಿಮಾನದ ಉಡ್ಡಾಣ ಮಾರ್ಗ ಮತ್ತು ನಿರೀಕ್ಷಕನ ಮಾರ್ಗ ಇವು ಒಂದೇ ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವವೆಂದು ಗೃಹೀತ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಗೃಹೀತ ಹಿಡಿಯದಿದ್ದರೆ ಉತ್ತರಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಬರುವವು.]

ವ ಇದು ನಿರೀಕ್ಷಕನ ಸ್ಥಾನ. **ಅ** ಮತ್ತು **ಬ** ಇವು ವಿಮಾನದ ಸ್ಥಾನಗಳು. ಬೆಳಸಿದ **ಅಬ** ದ ಮೇಲೆ **ವಮ** ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. **ವಹ** ರೇಖೆಯು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,



ವಮ = ೧೮೦೦ ಫೂಟು;

∠ **ಅವಮ** = ೯೦° − ೫೯° = ೩೧°;

∠ **ಬವಮ** = ೯೦ − ೭೮° = ೧೨°.

ಮಅ/೧೮೦೦ = ಸ್ಪ ∠ **ಅವಮ** = ಸ್ಪ ೩೧°.

∴ **ಮಅ** = ೧೮೦೦ ಸ್ಪ ೩೧° = ೧೮೦೦ × ·೬೦೦೯ = ೧೦೮೧·೬೨ ಫೂ.

ಮಬ/೧೮೦೦ = ಸ್ಪ ∠ **ಬವಮ** = ಸ್ಪ ೧೨°

∴ **ಮಬ** = ೧೮೦೦ ಸ್ಪ ೧೨° = ೧೮೦೦ × ·೨೧೨೬ = ೩೮೨·೬೮ ಫೂ.

∴ **ಅಬ** = **ಮಅ** − **ಮಬ** = (೧೦೮೧·೬೨ − ೩೮೨·೬೮) ಫೂ.

= ೬೯೮·೯೪ ಫೂಟು.

∴ ವಿಮಾನವು ೫ ಸೆಕಂದುಗಳಲ್ಲಿ ೬೯೮·೯೪ ಫೂಟು ಹೋಯಿತು.

∴ ಅದರ ತಾಸಿನ ವೇಗವು $\frac{೬೯೮·೯೪ \times ೩೬೦೦}{೫೨೮೦ \times ೫}$ = ೯೫·೩೨ ಮೈಲು.

ಉದಾ. ೪ :—ಒಂದು ದಿನ್ನೆಯ ಮೇಲೆ **ಅಕ್ಷ** ಎಂಬ ಸರಳ ಮಾರ್ಗವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಪಾತಳಿಗೆ ೧೧° ದಿಂದ ಏರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಹೋಗಿದೆ. ಮತ್ತು ಆ ಮಾರ್ಗದ ಕೆಳಗೆ **ಅ** ದಿಂದ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಪಾತಳಿಗೆ ಇಳಕಲದಲ್ಲಿ ೧೫° ದಿಂದ **ಅಯ** ಎಂಬದೊಂದು ಗುಹೆಯಿದೆ. **ಅ** ದಿಂದ ೩೦ ಫೂಟು ಅಂತರದಲ್ಲಿ **ಬ** ಎಂಬ ಮಾರ್ಗಸ್ಥನು ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಆದರೆ ಅವನ ಕೆಳಗೆ ಎಷ್ಟು ಫೂಟು ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಆ ಗುಹೆಯಿದೆ? [ಮು. ವಿ. ವಿ.]

ಬ ದಿಂದ ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು **ಅ** ದಿಂದ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು **ಕ** ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡುವವು. ಮತ್ತು ಬೆಳಸಿದ **ಬಕ** ರೇಖೆಯು **ಅಯ**

ರೇಖೆಗೆ **ಡ** ದಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವದು. ಅಂದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ ನಮಗೆ **ಬಡ** ದ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

೧ ನೆಯ ರೀತಿ :—

ಬಡ = **ಬಕ** + **ಕಡ.**

ಬಕ/**ಅಬ** = ಜ್ಯಾ ೧೦° = ·೧೭೩೬.

∴ **ಬಕ** = **ಅಬ** × ·೧೭೩೬ = ೩೦ × ·೧೭೩೬ = ೫·೨೦೮ ಫೂ.

ಕಡ ದ ಅಳತೆಯನ್ನು ತಿಳಕೊಳ್ಳಲಿಕ್ಕೆ ಮೊದಲು **ಅಕ** ದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

ಅಕ/**ಅಬ** = ಕೋಜ್ಯಾ ೧೦° = ಜ್ಯಾ ೮೦° = ·೯೮೪೮

∴ **ಅಕ** = **ಅಬ** · ಜ್ಯಾ ೮೦° = ೩೦ × ·೯೮೪೮ = ೨೯·೫೪೪ ಫೂ.

ಇನ್ನು **ಕಡ**/**ಅಕ** = ಸ್ಪ ೧೫°

∴ **ಕಡ** = **ಅಕ** ಸ್ಪ ೧೫° = ೨೯·೫೪೪ × ·೨೬೭೯

= ೭·೯೧೫ ಫೂಟು ಸುಮಾರು.

∴ **ಬಡ** = **ಬಕ** + **ಕಡ** = ೫·೨೦೮ + ೭·೯೧೫ = ೧೩·೧೨೮ ಫೂಟು.

ಅಂದರೆ, ಇಷ್ಟ ಅಂತರವು ೧೩·೧೩ ಫೂಟು ಸುಮಾರು.

೨ ನೆಯ ರೀತಿ :—

ಬಈ ⊥ **ಅಯ** ತೆಗೆಯಿರಿ.

∠ **ಈಬಡ** = ∠ **ಈಅಕ** = ೧೫°.

ಮೊದಲು **ಬಈ** ಇದರ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು ನಂತರ ಅದರ ಮೇಲಿಂದ **ಬಡ** ಅಳತೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯೋಣ.

ಬಈ/**ಅಬ** = ಜ್ಯಾ ∠ **ಬಅಈ** = ಜ್ಯಾ ೨೫° = ·೪೨೨೬.

∴ **ಬಈ** = ·೪೨೨೬ **ಅಬ** = ·೪೨೨೬ × ೩೦ = ೧೨·೬೭೮ ಫೂಟು.

ಬಈ/ಬಡ = ಕೋಜ್ಯಾ ∠ **ಈಬಡ** = ಕೋಜ್ಯಾ ೧೫° = ಜ್ಯಾ ೭೫°
= ·೯೬೫೯

∴ **ಬಡ** = **ಬಈ**/·೯೬೫೯ = ೧೨·೬೭೪/·೯೬೫೯ = ೧೩·೧೨ ಫೂಟು ಸುಮಾರು.

೩ನೆಯ ರೀತಿ:—

△ **ಅಬಡ** ಇದನ್ನು ಜ್ಯಾ-ನಿಯಮದಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು:
∠ **ಆಡಕ** = ೯೦° − ∠ **ಡಅಕ** = ೯೦° − ೧೫° = ೭೫°; ಮತ್ತು ∠ **ಬಅಡ** = ೨೫°. ಜ್ಯಾ-ನಿಯಮದಂತೆ,

$$\frac{ಅಬ}{ಜ್ಯಾ\ \angle ಅಡಬ} = \frac{ಬಡ}{ಜ್ಯಾ\ \angle ಬಅಡ}; \quad \therefore \frac{೩೦}{ಜ್ಯಾ\ ೭೫^\circ} = \frac{ಬಡ}{ಜ್ಯಾ\ ೨೫^\circ}.$$

∴ **ಬಡ** = ೩೦ ಜ್ಯಾ ೨೫°/ಜ್ಯಾ ೭೫° = ೩೦ × ·೪೨೨೬/·೯೬೫೯
= ೧೩·೧೨ ಫೂಟು ಸುಮಾರು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ತ–೬.

೧. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಯಿಂದ △ಅಬಕ ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ:—

(೧) ಬ′ = ಕ′ = ೪ ಇಂಚು, ∠ಅ = ೩೦°.

(೨) ಅ′ = ೮೦ ಫೂ., ಬ′ = ೭೫ ಫೂ., ∠ಕ = ೪೦°.

೨. ಒಂದು ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವು ಅ′ ಫೂಟು, ಮತ್ತು ಲಘು ಕೋನವು ಷ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $ಅ'^{೨}$ ಜ್ಯಾ ಷ ಆಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಒಂದು ಸುಸಮ ಷಟ್‌ಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವು ಅ′ ಫೂಟು ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $\frac{೩}{೨}\sqrt{೩}\,ಅ'^{೨}$ ಚೌ. ಫೂ. ಆಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ತ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸುಸಮ ಅಷ್ಟಕೋನವಿದೆ; ಆದರೆ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $೨\sqrt{೨}\,ತ^{೨}$ ಆಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಒಂದು ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ **ಕ್ಷ** ಮತ್ತು **ಯ** ಫೂಟು ಇದ್ದು, ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಪ ಇದೆ; ಆದರೆ ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ½ **ಕ್ಷಯ** ಜ್ಯಾ ಪ ಚೌ. ಫೂ. ಆಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೬. **ಕ್ಷ** ಮತ್ತು **ಯ** ಫೂಟು ಕರ್ಣಗಳಿರುವ ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು, **ಕ್ಷ** ಮತ್ತು **ಯ** ಫೂಟು ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜಗಳಿರುವ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೭. ಒಂದು ದ್ವಿಸಮಭುಜ-ಸಮಲಂಬ-ಚೌಕೋನದ ಸಮಾಂತರ ಇರುವ ಭುಜಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೩ ಫೂಟು ಮತ್ತು ೫ ಫೂಟು ಇರುವವು; ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಲಘುಕೋನವು ೪೫° ಇದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೪ ಚೌ. ಫೂ. ಆಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೮. **ಅ**, **ಬ**, **ಕ** ಈ ಮೂರು ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ, **ಬ** ಇದು **ಅ** ದ ವಾಯುವ್ಯಕ್ಕೆ ೫ ಮೈಲುಗಳ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತು **ಕ** ಇದು **ಅ** ದ ಈಶಾನ್ಯಕ್ಕೆ ೧೨ ಮೈಲುಗಳ ಮೇಲೆ ಇರುವವು; ಆದರೆ **ಕ** ದಿಂದ **ಬ** ದ ಅಂತರ ಎಷ್ಟು? ಮತ್ತು ಅದರ ಸಾಪೇಕ್ಷ ದಿಶೆ ಯಾವದು?

೯. ತಾಸಿಗೆ ೧೨ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಒಂದು ಹಡಗವು ನಿಡುದಾಗಿ ದಕ್ಷಿಣ ದಿಕ್ಕಿನ ಕಡೆಗೆ, ಒಂದು ದೀಪಗೃಹದ ಸಾಪೇಕ್ಷ ದಿಶೆ **ದ.** ೪೦° **ಪೂ.** ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಹೊರಟಿದೆ. ಮುಂದೆ ೧೫ ಮಿನಿಟುಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು **ಉ.** ೫೦° **ಪೂ.** ಆಯಿತು. ಆದರೆ, ಆ ಹಡಗವು ದೀಪಗೃಹದಿಂದ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುವಾಗ ಅದರ ಅಂತರವು (ದೀಪಗೃಹದಿಂದ) ಎಷ್ಟು?

೧೦. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಒಂದು ಹೊಳೆಯ ದಂಡೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತುಕೊಂಡು, ಇನ್ನೊಂದು ದಂಡೆಯಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಎದುರಿಗಿರುವ ಒಂದು ಮರದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನ ೫೫° ಕಂಡನು. ನಂತರ ಅವನು ಸರಿಯಾಗಿ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ೧೫ ಫೂಟ ಹೋಗಿ, ನೋಡಿದಾಗ ಆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು ೪೮° ಆಯಿತು. ಆದರೆ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಹೊಳೆಯ ಪಾತ್ರ (ಅಗಲಳತೆ) ವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೧೧. ಸೂರ್ಯನ ಉನ್ನತ ಕೋನವು ೪೫° ರಿಂದ ೩೦° ವರೆಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾದಾಗ, ಒಂದು ನೆಟ್ಟ ಕೋಲಿನ ನೆರಳು ೧೫ ಫೂಟು ಬೆಳೆಯಿತು. ಇದರಿಂದ ಆ ಕೋಲಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೨. ನೆಲದಿಂದ ಒಂದು ದಿನ್ನೆಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು ೫೦° ಇದೆ. ಅದೇ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಒಬ್ಬನು ವಿಮಾನದಲ್ಲಿ ಕೂತುಕೊಂಡು ಸರಿಯಾಗಿ ೨೦೦ ಫೂಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಹೋದನು. ಆಗ ಅವನಿಗೆ ಆ ಕೋನವು ೩೨° ಇದ್ದದ್ದು ಕಂಡು ಬಂತು; ಆದರೆ ಆ ದಿನ್ನೆಯ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು ?

೧೩. ಒಂದು ಇಮಾರತಿನ ತಳದಿಂದ ೩೫ ಫೂಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿಂದ ಒಂದು ಕಿಡಕಿಯ ಕೆಳಬದಿಯ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಬದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೩೬° ಮತ್ತು ೪೦° ಇದ್ದರೆ, ಕಿಡಕಿಯ ಉದ್ದಳತೆಯೆಷ್ಟು ?

೧೪. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ತಳರೇಖೆಯು ೧೫ ಸೆ. ಮಿ. ಮತ್ತು ಶಿರೋಕೋನವು ೫೦° ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವೆಷ್ಟು ?

೧೫. **ಅಬಕಡ** ಇದೊಂದು ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ **ಅಬ** || **ಕಡ**; ∠**ಅ** = ೪೨°, ∠**ಬ** = ೫೭°, **ಕಡ** = ೪ ಇ. ಮತ್ತು **ಅಬ**, **ಕಡ** ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ೧.೫ ಇಂಚು ಇದ್ದರೆ, **ಅಬ** ದ ಉದ್ದಳತೆಯೆಷ್ಟು? ಮತ್ತು **ಅಬಕಡ** ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವೆಷ್ಟು ?

ಪ್ರಶ್ನ ಸಮುದಾಯ ೬.

ಅ.

೧. ಜ್ಯಾ ೧೧/೬೧ ಇರುವ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಅದರ ಕೋಜ್ಯಾ, ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾ ಇವುಗಳನ್ನು ಗಣಿತದಿಂದ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೨. ಸ್ಪ ಅ — ಸ್ಪ ಬ = (ಜ್ಯಾ ಅ ಕೋಜ್ಯಾ ಬ — ಕೋಜ್ಯಾ ಅ ಜ್ಯಾ ಬ)
÷ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ ಕೋಜ್ಯಾ ಬ. ಇದನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

೩. ಅ ಕೋಜ್ಯಾ ಪ + ಬ ಜ್ಯಾ ಪ = ಕ = ಬ ಕೋಜ್ಯಾ ಪ — ಅ ಜ್ಯಾ ಪ, ಇದ್ದರೆ, ಅ೨ + ಬ೨ = ೨ಕ೨ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೪. ಶಂಕುವಿನ ಆಕೃತಿಯಂತಿರುವ ಒಂದು ಡೇರೆಯ ನೆಲದ ವ್ಯಾಸವು ೨೦ ಫೂಟು ಇದ್ದು, ಅದರ ಶಿರೋಕೋನವು ೬೦° ಇದ್ದರೆ, ಆ ಡೇರೆಯ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು ?

೫. ಅ′ = ೧೬.೮೩ ಫೂ., ∠ ಅ = ೩೨°೧೩′, ∠ ಕ = ೯೦° ಹೀಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಕ.

೧. ಲಘುಕೋನದ ಜ್ಯಾ ಕಿಂತಲೂ, ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯು ದೊಡ್ಡದಿರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಕೋಜ್ಯಾ ೬೦° = ೨ ಕೋಜ್ಯಾ೨ ೩೦° — ೧ = ೧ — ಜ್ಯಾ೨ ೩೦° ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಜ್ಯಾ ಅ = ೩/೫, ಆದರೆ ಸ್ಪ + ೧/ಕೋಜ್ಯಾ ಅ = ೨ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನು ೧೦ ಇಂಚು ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣ ಗಾಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡನು. ಅದರ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ೬ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ಒಂದೊಂದರಂತೆ ೬ ದಾರಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟಿದನು. ಮತ್ತು ಆ ದಾರಗಳ ಬೇರೆ ತುದಿಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ, ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ೧ ಫೂಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ ಗೂಟಕ್ಕೆ ಅದನ್ನೂ ತೂಗು ಹಾಕಿದನು. ಆದರೆ ಆ ದಾರಗಳ ಜೋಡಿನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವು ಎಷ್ಟು ಇರುವದು ?

೫. ∠ ಕ = ೯೦°, ಅ′ = ೪೨.೩ ಫೂ., ಕ′ = ೬೬.೧ ಫೂ. ಇದರಿಂದ △ ಅಬಕ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಗ.

೧. ಸ್ಪ ಪ $=\frac{ಅ}{ಬ}$ ಇದರಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ:—

$$\frac{ಅ\ ಜ್ಯಾ\ ಪ + ಬ\ ಕೋಜ್ಯಾ\ ಪ}{ಅ\ ಜ್ಯಾ\ ಪ - ಬ\ ಕೋಜ್ಯಾ\ ಪ} = \frac{ಅ^{೨} + ಬ^{೨}}{ಅ^{೨} - ಬ^{೨}}$$

೨. ಅ $=$ ೬೦° ಇದರೆ ೩ ಕೋಜ್ಯಾ ಅ $=$ ೨ ಜ್ಯಾ^{೨} ಅ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಪತಂಗಾಕೃತಿಯ ಚೌಕೋನದ ಎದುರು ಬದುರಿನ ಕೋನಗಳ ಜೋಡುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ೪೦°, ಇನ್ನೊಂದು ೧೨೦° ಇರುವವು. ಎರಡು ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ಒಂದು ಕರ್ಣರೇಖೆಯು ೧ ಫೂಟು ಇದ್ದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಕರ್ಣರೇಖೆಯು ೧ ಫೂ. ೮ ಇಂಚು ಇರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಅ $=$ ೩೫° ದಿಂದ ಅ $=$ ೩೬° ವರೆಗೆ (ಕೋಷ್ಟಕದ ಸಹಾಯದಿಂದ) ಜ್ಯಾ ಅ ಇದರ ಆಲೇಖ (Graph) ವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಜ್ಯಾ ·೫೮೬೦ ಇರುವ ಕೋನವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೫. ೭೫ ಫೂಟು ಎತ್ತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಸರಿಯಾಗಿ ಪಶ್ಚಿಮಕ್ಕೆ ೧೮೦ ಫೂಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಒಬ್ಬ ನಿರೀಕ್ಷನು ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಅವನು ಅಲ್ಲಿಂದ ದಕ್ಷಿಣಕ್ಕೆ ೧೨೦ ಫೂಟು ನಡೆದು ಹೋದನು. ಆದರೆ ಅವನ ಈ ಎರಡನೆಯ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಶಿಖರದ ಉನ್ನತ ಕೋನವೆಷ್ಟು ?

ಘ.

೧. ಒಂದು ನಾಣ್ಯದ ವ್ಯಾಸ ೧ ಇಂಚು ಇದೆ. ಆ ನಾಣ್ಯದಿಂದ ೧೦ ಫೂಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನಿದ್ದಾನೆ. ಆದರೆ ಆ ನಾಣ್ಯವು ಅವನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

೨. ಸ್ಪ^{೨} ೬೦° + ೨ ಜ್ಯಾ^{೨} ೩೦° $=$ ೫ ಸ್ಪ^{೨} ೪೫° − ೩ ಜ್ಯಾ^{೨} ೪೫° ಇದನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

೩. (೧) ಜ್ಯಾ^{೨} ಪ $=$ ೨, (೨) ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} ಅ $=$ ೫. ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಟೀಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೪. △ಅಬಕ ದಲ್ಲಿ ∠ಕ $=$ ೯೦°, ಅಬ $=$ ೩೦ ಫೂಟು ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ ಅ $=$ ·೩೭ ಇದ್ದರೆ, ಅಕ, ಬಕ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ?

೫. ಒಂದು ಚೌರಸದ ನಟ್ಟನಡುವೆ ಇರುವ ಒಂದು ಗುಡಿಯು ಕಳಸದ ಪರಮೋಚ್ಚ ಬಿಂದುವು, ಚೌರಸ–ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಸೂರ್ಯನ

ಉನ್ನತ ಕೋನವು ೩೩° ೨೪′ ಇದ್ದಾಗ ಕಳಸದ ನೆಳಲಿನ ತುದಿಯು ಚೌರಸದ ಕೋನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಬೀಳುವದು. ಚೌರಸದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೩೫ ಎಕರೆ ಇದ್ದರೆ, ಕಳಸದ ಪರಮೋಚ್ಚ ಬಿಂದುವಿನ ಎತ್ತರವು ಸುಮಾರು ೭೭ ಫೂಟು ಇರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫.

೧. ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:—

$$೨(ಜ್ಯಾ^{೬}\ ಅ + ಕೋಜ್ಯಾ^{೬}\ ಅ) - ೩\ (ಜ್ಯಾ^{೪}\ ಅ + ಕೋಜ್ಯಾ^{೪}\ ಅ) + ೧ = ೦.$$

೨. $೨ - (ಜ್ಯಾ\ ಅ - ಕೋಜ್ಯಾ\ ಅ)^{೨}$ ಇದರ ವರ್ಗಮೂಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.

೩. ಗಾಳಿಯ ಹೊಡತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಮರವು ನಡುವೆ ಎಲ್ಲಿಯೋ ಮುರಿದು ಬಿದ್ದಿದೆ. ಮರದ ಬುಡದಿಂದ ೩೦ ಫೂಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಅದರ ಮುರಿದ ಭಾಗದ ತುದಿಯು ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿದೆ. ಮತ್ತು ಆ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ೧೫° ಕೋನ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಮುರಿಯುವ ಮೊದಲು ಆ ಮರದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಇತ್ತು?

೪. $\triangle$ಅಬಕದಲ್ಲಿ $\angle$ ಅ $= ೯೦°$; **ಅಡ $\perp$ ಬಕ;** ಆದರೆ **ಬಡ = ಬಕ** ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} **ಬ; ಕಡ = ಬಕ** ಕೋಜ್ಯಾ^{೨} **ಕ,** ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೫. ಒಂದು ದಿನ್ನೆಯ ಇಳಕಲದ ಕಡೆಗೆ ಒಂದು ಲೋಹ ಮಾರ್ಗವಿದೆ. ಆ ಇಳಕಲು ೩೦ ಫೂಟು, ಅದರ ಶಿಖರದ ಅಗಲಳತೆ ೨೦ ಫೂಟು ಮತ್ತು ದಿನ್ನೆಯ ಕೆಳ ಬದಿಯು ೧೦೦ ಫೂಟು ಇರುವವು. ಇಳುಕಲದ ಅಂಚುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಪಾತಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂಶದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾಡುವವು?

೬.

೧. $\angle$ ಅ $= ೧೮°$ ಇದ್ದರೆ, ಜ್ಯಾ ೩ಅ − ಕೋಜ್ಯಾ ೨ಅ = ೦, ಆಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ೮.೧ ಇಂಚು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸುಸಮ ದಶಕೋನ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವು ಸುಮಾರು ೫ ಇಂಚು ಇರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಪ ಮತ್ತು ಫ ಇವರು ಒಬ್ಬರಿಂದೊಬ್ಬರು ೨೭೪೦ ಯಾರ್ಡ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತು, ಒಂದೇ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಒಂದು ಅ ಎಂಬ ವಿಮಾನದ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡರು. ಅವು ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ ೪೦° ಮತ್ತು ೬೭° ಇದ್ದವು. **ಅಪಫ** ಇದು ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬ ಪಾತಳಿಯಾಗಿದ್ದು **ಅ** ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬ ರೇಖೆಯು **ಪ** ಮತ್ತು **ಫ** ಇದರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಂದು ಕೂಡುವದು. ಆದರೆ ನೆಲದಿಂದ ವಿಮಾನವು ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿದೆ?

೪. ಪೂರ್ವ-ಪಶ್ಚಿಮವಾಗಿರುವ ಮಾರ್ಗದ ಒಂದು ಬದಿಗೆ ೮೦೦ ಯಾರ್ಡುಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕಂಬಗಳಿವೆ. ಆ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಕೆಲವು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಅವನಿಂದ ಆ ಎರಡು ಕಂಬಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ದಿಶೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮದಿಂದ ಉ. ೨೦° ಪೂ. ಮತ್ತು ಉ. ೭೦° ಪ. ಇರುವವು. ಆದರೆ ಆ ಗೃಹಸ್ಥನು ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವನು?

೫. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ **ವ** ಕೇಂದ್ರವೂ **ಅಬ** ವ್ಯಾಸವೂ ಇವೆ. **ವಬ**ಕ್ಕೆ ೩೦° ಕೋನ ಮಾಡಿದ್ದೊಂದು **ವಕ** ತ್ರಿಜ್ಯವಿದೆ. **ಕಮ** ⊥ **ವಬ; ಮಕ** ರೇಷೆಯನ್ನು **ನ** ಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗೆ ಬೆಳೆಸಿರಿ; **ಮನ** = ೩ **ಅಬ** ಆಗುವಂತೆ ಅದನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿರಿ. **ನಅ** ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಈಗ **ನಅ** ರೇಷೆಯ ಉದ್ದಳತೆಯು ಸುಮಾರು ವರ್ತುಳ ಪರಿಘದ ಉದ್ದಳತೆಯಷ್ಟು ಆಗುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಛ.

೧. ೩ ಮತ್ತು ೬ ಇಂಚು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷೆಯು ೭೧/೨ ಇಂಚು ಇದೆ. ಆದರೆ ಆ ವರ್ತುಳದ ಸರಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶರೇಷೆಯು ಕೇಂದ್ರ ರೇಷೆಗೆ ಸುಮಾರು ೨೩° ೩೫′ ಈ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. ಜ್ಯಾ ಅ + ಕೋಜ್ಯಾ ಅ = ೧ ಇದ್ದರೆ

(ಜ್ಯಾ ಅ − ಕೋಜ್ಯಾ ಅ)^{೨} = ೧ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. ಒಂದು ಫೂಟು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಗೋಲ (Sphere) ಆಕೃತಿಯನ್ನು ದಾರದಿಂದ ಕಟ್ಟಿ ಗೋಡೆಯ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ತೂಗುಹಾಕಿದೆ. ಗೋಲವು ಕೆಳಗೆ ಗೋಡೆಗೆ ತಾಗಿದೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿದ ದಾರವು ೨ ಫೂ. ೯ ಇಂ. ಇದ್ದು ಅದನ್ನು (ಆ ರೇಷೆಯನ್ನು) ಬೆಳೆಸಿದರೆ ಅದು ಗೋಲದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಹಾದು ಹೋಗುವದು. ಆದರೆ ಆ ದಾರವು ಗೋಡೆಗೆ ಸುಮಾರು ೧೫° ೨೮′ ಕೋನ ಮಾಡುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. **ಅಬಕ** ತ್ರಿಕೋನದ **ಲಮನ** ಇದು ಪದತ್ರಿಕೋನ (Pedal Triangle) ಇದೆ. ಇವೆರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮಿಥಃ ಸಮಕೋನಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ **ಮನ** = **ಬಕ** ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ**, ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೫. ಯಾವದೋ ಒಂದು ಸ್ಥಳದ ಮೇಲೆ ಬಾಂಬು ಹಾಕಬೇಕೆಂದು ಒಂದು ವಿಮಾನವು ಆ ಸ್ಥಳದಿಂದ ೪೦೦೦ ಫೂಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಹೋಗಿ ನಿಂತಿದೆ. ಅದೇ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಬಳಿಯಲ್ಲಿದ್ದ ಒಬ್ಬ ನಿರೀಕ್ಷಕನು ಆ ವಿಮಾನದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು ೩೦° ಇದ್ದದ್ದನ್ನು ಕಂಡನು. ಆದರೆ ಆ ನಿರೀಕ್ಷಕನು ಬಾಂಬು ಬೀಳುವ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಸುಮಾರು ೬೯೨೮ ಫೂಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿರುವನೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಜ.

೧. ಒಬ್ಬ ಸರ್ವೇಯರನು ಒಂದು ದಿನ್ನೆಯ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಸ್ಥಳ (ನಿಶಾನೆ) ಗಳ ನಡುವೆ ೧೦ ಸರಪಳಿ ಅಂತರವನ್ನು ಅಳೆದನು. ಆ ನಿಶಾನೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷೆಯು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಪಾತಳಿಗೆ ೧೫° ಕೋನ ಮಾಡುವದು. ಇದರದೊಂದು

ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಆ ನಿಶಾನೆಗಳ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯು ೯.೬೫ ಸರಪಳಿಯಷ್ಟು ಆಗುವದೆಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೨. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಒಂದು ನಿಲುಗನ್ನಡಿಯ ಮುಂದೆ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಅವನ ಕಣ್ಣುಗಳು ನೆಲದಿಂದ ೫⅔ ಫೂಟು ಎತ್ತರದ ಮೇಲಿವೆ. ಅವನ ಕಾಲುಗಳಿಂದ ಆ ಕನ್ನಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಬಿಂಬದ ಅವನತ ಕೋನವು ೧೦° ಇದ್ದರೆ, ಆ ಮನುಷ್ಯನು ಕನ್ನಡಿಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾನೆ, ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. ಅಬಕ ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಮನ ಇದು ಪದತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. **ಬಲ : ಲಕ = ಸ್ಪಕ : ಸ್ಪಬ** ಎಂಬದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ; ಮತ್ತು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ **ಬಲ.ಕಮ.ಅನ = ಲಕ.ಮಅ.ನಬ** ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೪. ಒಂದು ಕಪ್ಪೆಯಂತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಗಾಲಿಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೬″ ಮತ್ತು ೪″ ಇವೆ. ಆ ಎರಡು ಗಾಲಿಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ಅಂತರವು ೧ ಫೂಟು ಇದೆ. ಒಂದು ಸರಪಳಿಯು ಆ ಎರಡೂ ಗಾಲಿಗಳನ್ನು ಗಟ್ಟಿಯಾಗಿ ಸುತ್ತುವರಿದಿದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸರಪಳಿಯ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೫. ಒಂದು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಬ ವ್ಯಾಸವಿದೆ. ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿಘದಲ್ಲಿ **ಕ** ಬಿಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. **ಕನ ⊥ ಅಬ.** △**ಕನಬ** ಇದರಿಂದ ಜ್ಯಾ **ಅ** ಇದರ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು △**ಕನಅ** ಇದರಿಂದ ಜ್ಯಾ **ಅ** ಇದರ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಹಾಗೂ **ನಬ = ಅಬ** ಜ್ಯಾ ೨ **ಅ** ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

ಝ.

೧. △**ಅಬಕ** ದಲ್ಲಿ **ಬಕ** ಕೋಜ್ಯಾ **ಬ = ಅಕ** ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ** ಇದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಇರುವದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೨. △**ಅಬಕ** ದಲ್ಲಿ **ಅಡ ⊥ ಬಕ. ಅಡ = ೧೦″**, ∠**ಕ = ೩೫°**, ∠**ಬ = ೭೫°** ಇದೆ. ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವೆಷ್ಟು ?

೩. **ಮ** ಕೋಜ್ಯಾ **ಅ = ೧೨″** ಮತ್ತು **ಮ** ಜ್ಯಾ **ಅ = ೫″** ಇದ್ದರೆ **ಮ = ೧೩″** ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೪. ಒಬ್ಬ ನಿರೀಕ್ಷಕನಿಂದ ಒಂದು ವಿಮಾನವು ೧೦೦೦ ಯಾರ್ಡು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದು ಒಂದು ನಿಯಮಿತ ವೇಗದಿಂದ ನಿಡುದಾಗಿ ಮೇಲಕ್ಕೇರಿತು. ಯಾವದೋ ಒಂದು ಕ್ಷಣಕ್ಕೆ ನಿರೀಕ್ಷಕನಿಂದ ವಿಮಾನದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು ೩೮° ಇತ್ತು. ಮುಂದೆ ೫ ಮಿನಿಟುಗಳ ತರುವಾಯ ಆ ಕೋನವು ೬೧° ಆಯಿತು. ಆದರೆ ಆ ವಿಮಾನವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೇಕಂದಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಫೂಟು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಏರಿತು ?

೫. ೬ ಫೂಟು ಎತ್ತರವುಳ್ಳ ಮನುಷ್ಯನು ೯ ಫೂಟು ಎತ್ತರದ ಒಂದು ದೀಪದ ಕಂಬದಿಂದ ೫ ಫೂಟು ಅಂತರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅವನು ಒಂದು ಮಾರ್ಗದ ಮೇಲೆ ನಡೆದಿದ್ದಾನೆ. ಈ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ದೀಪಕಂಬದಿಂದ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಮೀಪದ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ೧೨ ಫೂಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಅವನು ನಡೆದು ಹೋದರೆ ಅಲ್ಲಿಂದ ಅವನ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದಳತೆ ಎಷ್ಟಾಗುವದು ?

ಉತ್ತರಗಳು

ಎರಡನೆಯ ಭಾಗ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೧೫.

೧. ೪ ಚೌ. ಇಂಚು.   ೨. ೧೫ ಚೌ ಇ.   ೩. ೩ ಚೌ. ಇ.
೪. ೪ ಚೌ. ಇ.   ೫. ೧೦·೬ ಚೌ. ಇ.   ೬. ೩·೭೫ ಚೌ. ಇ.
೭. ೩·೭೫ ಚೌ. ಇ.   ೮. ೪·೫ ಚೌ. ಇ.   ೯. ೫ ಚೌ. ಇ.
೧೦. ೪·೨೪೨ ಚೌ. ಇ.   ೧೧. ೧೦·೩೯೨ ಚೌ. ಇ.
೧೨. ೨೬೧೦೦ ಚೌ. ಕೊಂಡಿಗಳು = ·೨೬೧ ಎಕರೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೧೭.

೧೩. ೧೬ ಫೂಟು ಉದ್ದ; ೧೨ ಫೂಟು ಅಗಲ.
೧೪. ೮೦ ಯಾರ್ಡ ಉದ್ದ; ೪೦ ಯಾರ್ಡ ಅಗಲ.
೧೫. ೨೦೬ ಚೌ. ಯಾರ್ಡ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೧೮.

೬. ೧೫ ಇಂಚು.   ೭. ೧೨೦ ಯಾರ್ಡ; ೫೦ ಯಾರ್ಡ.
೮. ೨೦ ಇಂಚು.   ೯. ೧·೭೩೨ ಇಂಚು.   ೧೦. ೧೨ ಫೂಟು.
೧೧. ೧೭ ಫೂಟು.   ೧೨. ೧·೪೩ ಇಂಚು.   ೧೩. ೭ ಇಂಚು.
೧೪. (೧) ೦·೯″.   (೨) ೧′ ೧″.   ೧೫. ೬ ಮೈಲು.
೧೬. ೧೨೫·೩ ಯಾರ್ಡು ಸುಮಾರು.   ೧೭. ೧೭ ಫೂಟು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೨೦.

೧. (೧) ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ. (೨) ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ. (೩) ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ. (೪) ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ. (೫) ವಿಶಾಲ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ.   ೨. ೨ ೬/೭ ಇಂಚು.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಶ್ನೆ

ಆ. ೩. ೪೦ ಫೂಟು.
ಖ. ೪. ೫·೮ ಇ.; ೯·೮ ಇ.; ೧೩·೨ ಇ. ಸುಮಾರು.
ಛ. ೩. ೧೦ (೧ + √೨) = ೨೪·೧೪ ಇಂಚು ಸುಮಾರು.

ಮೂರನೆಯ ಭಾಗ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೨೬.

೧. ೩ ಸೆ. ಮಿ. ೨. ೫ ಸೆ. ಮಿ. ೩. ೮√೨ ಸೆ. ಮಿ.

೪. ೨√೩ ಸೆ. ಮಿ. ೫. ೧·೩ ಇಂಚು. ೧೩. (−೩, ೪).

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೨೮.

೧. ∠ಬಕಮ = ೩೦°; ∠ಕಮನ = ೨೦°.

೨. ೧೫° ೩. ೧೫°; ೩೦°.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೩.

೧೫. ೨೦೮·೬ ಮೈಲು ಸುಮಾರು.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಶ್ನ.

ಗ. ೫. ೪$\frac{೧}{೨}$ ಇಂಚು.

ಚ. ೩. ೨·೦೬, ೧·೪೪ ಸೆ. ಮಿ.; ೩·೧, ೨·೧೭ ಚೌ. ಸೆ. ಮಿ.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಭಾಗ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೪.

೧. (೧) ೯ : ೧; (೨) ೨೦ : ೧; (೩) ೩ : ೧. ೨. ಇರುವವು.

೩. (೧) ೯; (೨) ೩೦. ೪. (೧) ೭·೨; (೨) ಅ/ಬ. ೫. ೩೦.

೬. ಅದ ಹತ್ತಿರ. ೭. ಅದ ಹತ್ತಿರ. ೮. ಬದ ಹತ್ತಿರ.

೯. ೨$\frac{೨}{೯}$, ೨$\frac{೭}{೯}$ ಇಂಚು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ೩೬.

೧. $\frac{೫}{೮}$, $\frac{೬}{೮}$; $\frac{೩}{೭}$, $\frac{೬}{೭}$; $\frac{೨೧}{೮}$, $\frac{೩೫}{೮}$ ಇಂಚು.

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ವಿಭಾಗ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ತ–೧.

೧. ·೨೪೯೩; ·೩೪೬೩; ·೪೯೭೯; ೧·೮೬೩೭.

೨. ೭° ೨೮′; ೩೦° ೪೩′; ೫೨° ೨೭′; ೮೦° ೩೮′.

೪. ೩·೪೬೪ ಇಂಚು. ೫. ೬·೯೭೪೮ ಇಂಚು. ೮. ೫·೧೭೨೩ ಇಂಚು.

೯. ೧° ೫೪′ ೨೦″ ಆಸನ್ನ ಮಾನದಿಂದ. ೧೦. ೬೯·೯೪೫.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ತ-೨.

೧. ೧೭·೧೫೬ ಫೂ.   ೨. ೬೫° ೪೬′   ೩. ೨೮೯·೨೪೪ ಫೂ.

೪. ೨೬೧·೨೪೭ ಫೂ.   ೫. ೫೧° ೨೦′   ೬. ೧೩·೭೬೬೪ ಫೂ.

೭. ೩೦·೬೧೫ ಫೂ.   ೮. ೬೫·೯೭ ಫೂ.   ೯. ೧೭೭·೨೪ ಫೂ.

೧೦. ೪೯·೪೩ ಫೂ.   ೧೧. ೯೫·೧೯ ಫೂ; ೨೪·೮೪ ಫೂ.

೧೨. ೧೧·೬೧೫೪ ಮೈಲು ತಾಸಿಗೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ತ-೩.

೧. ·೨೬೮೩; ·೭೯೦೨.   ೨. ·೯೬೫೯; ·೮೨೭೮; ·೩೩೦೫.

೩. ೩೦°; ೫೩° ೮′; ೪೦° ೩′; ೫೫° ೩೦′.

೪. ೪೮° ೧೧′; ೩೩° ೩೪′; ೬೪° ೧′; ೫೪° ೩೬′.

೫. ೯·೩೯೭ ಇ. ೬. ೪·೨೨೬ ಇ.

೭. ೧೪·೯೩೭೬ ಇ.; ೫·೭೩೪೪ ಇ.   ೮. ೧೬° ೧೫′ ಸುಮಾರು.

೯. ೨೩·೪೬ ಯಾರ್ಡು.   ೧೦. ೭೨° ೩೨′.

೧೧. ಬಪ = ೧·೮ ಇ.; ಪಅ = ೨·೪ ಇ.; ಅಕ = ೨·೬ ಇ.

೧೨. ೬೯° ೪೨′.   ೧೩. ೩೬° ೨೧′.   ೧೪. ೨·೫ ಫೂಟು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ತ-೪.

೧. ∠ಅ = ೩೮° ೪೧′; ∠ಬ = ೫೧° ೧೯′; ಅಕ = ೬·೨೪೪೮.

೨. ∠ಅ = ೩೪° ೫೯′; ∠ಬ = ೫೫° ೧′; ಅಕ = ೬೧·೪೫೫.

೩. ∠ಅ = ೬೬° ೨೫′; ∠ಬ = ೨೩° ೩೫′; ಬಕ = ೨೭·೪೯೫.

೪. ∠ಅ = ೬೨° ೩′; ∠ಬ = ೨೭° ೫೭′; ಬಕ = ೭೦೬·೫೪.

೫. ∠ಅ = ೩೩° ೪೧′; ∠ಬ = ೫೬° ೧೯′; ಅಬ = ೧೪·೪೨೪.

೬. ∠ಅ = ೨೯° ೩೨′; ∠ಬ = ೬೦° ೨೮′; ಅಬ = ೮೬೩·೦.

೭. ∠ಬ = ೭೦°; ಬಕ = ೬·೮೪; ಅಕ = ೧೮·೭೯೪.

೮. ∠ಅ = ೪೯° ೩೦′ ಬಕ = ೩೦೪·೧೬; ಅಕ = ೨೫೯·೭೬.

೯. ∠ಅ = ೫೫° ೫೨′; ಅಕ = ೫೪·೨೩೨; ಅಬ = ೯೬·೬೫.

೧೦. ∠ಬ = ೨೨°; ಅಕ = ೨೧೨·೧; ಅಬ = ೫೬೬·೩.

೧೧. ೨·೮೭ ಇಂಚು; ೩೪° ೫೧′. ೧೨. ೨·೬೧೧ ಇಂಚು.

೧೩. ೯·೨೨ ಮೈಲು; ೪೦° ೩೬′. ೧೪. ೨೧೬·೫ ಯಾರ್ಡು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ ತ–೬.

೧. (೧) ೪ ಚೌ. ಇಂಚು; (೨) ೧೯೨೮·೪ ಚೌ. ಫೂಟು.

೮. ೧೩ ಮೈಲು; ೬೭° ೩೭′ ದದಿಂದ ಪಕ್ಕೆ. ೯. ೧·೪೭೭೨ ಮೈಲು.

೧೦. ೫೨·೫ ಫೂಟು. ೧೧. ೨೦·೪೯ ಫೂಟು. ೧೨. ೪೨೦·೫ ಫೂಟು.

೧೩. ೩·೯೪೧ ಫೂಟು. ೧೪. ೧೯·೫೮ ಸೆ. ಮಿ.

೧೫. ೬·೬೪ ಇಂಚು; ೭·೯೮ ಚೌ. ಇಂಚು.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಶ್ನೆ ೬.

ಅ.

೧. $\frac{೬೨}{೬೧}$; $\frac{೧೧}{೬೦}$. ೪. ೧೪·೨೮ ಫೂಟು.

೫. ∠**ಬ** = ೫೭° ೪೭′; **ಅಕ** = ೨೬·೭ ಫೂಟು; **ಅಬ** = ೩೧·೬ ಫೂ.

ಕ.

೪. ೨೨° ೧೦′ ೫. **ದ.** ೪° ೨೭′ **ಪೂ.**

ಖ.

೧. ೩೩° ೨೪′; ೭೩° ೧೮′; ೭೩° ೧೮′

೨. ಕೋಜ್ಯಾ $\angle \text{ಅ} = \frac{\text{ಬಕ}^{೨} - \text{ಅಕ}^{೨}}{\text{ಬಕ}^{೨} + \text{ಅಕ}^{೨}}$; ಸ್ಪ $\angle \text{ಅ} = \frac{೨\text{ಬಕ} \cdot \text{ಅಕ}}{\text{ಬಕ}^{೨} - \text{ಅಕ}^{೨}}$.

೪. ೧೨೯·೬೮ ಫೂಟು ಸುಮಾರು.

೫. ∠**ಅ** = ೩೩° ೧೬′; ∠**ಬ** = ೫೬° ೪೪′; **ಅಕ** = ೬೪·೫ ಫೂಟು.

ಗ.

೫. ೧೯° ೭′.

ಘ.

೧. ಆಸನ್ನ ಮಾನದಿಂದ ೦° ೨೮′ ೩೦″

೪. **ಅಕ** = ೨೭·೮೮ ಫೂ. **ಬಕ** = ೧೧·೧ ಫೂ.

ಙ.

೨. ± (ಜ್ಯಾ ಅ + ಕೋಜ್ಯಾ ಅ)

೩. ೩೯·೧ ಫೂಟು ಸುಮಾರು. ೫. ೩೬° ೫೨′.

ಚ.

೩. ೧೬೯೬ ಯಾರ್ಡು.   ೪. ೨೫೭·೨ ಯಾರ್ಡು.

ಛ.

೨. ೧೫·೬ ಫೂ. ಸುಮಾರು   ೪. ೭ ಫೂ. ೭$\frac{೩}{೪}$ ಇ. ಸುಮಾರು.

ಜ.

೨. ೮೪·೮ ಚೌ. ಇಂಚು.   ೪. ೧೦·೨೨೭ ಫೂ. ಪ್ರತಿ ಸೇಕಂಡಕ್ಕೆ.

೫. ೨೬ ಫೂಟು.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು

ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ

ಅಂಶ	೦'	೬'	೧೨'	೧೮'	೨೪'	೩೦'	೩೬'	೪೨'	೪೮'	೫೪'	ಮಧ್ಯಮಾನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ೧'	೨'	೩'	೪'	೫'
೦	.೦೦೦೦	೦೦೧೭	೦೦೩೫	೦೦೫೨	೦೦೭೦	೦೦೮೭	೦೧೦೫	೦೧೨೨	೦೧೪೦	೦೧೫೭	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೧	.೦೧೭೫	೦೧೯೨	೦೨೦೯	೦೨೨೭	೦೨೪೪	೦೨೬೨	೦೨೭೯	೦೨೯೭	೦೩೧೪	೦೩೩೨	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೨	.೦೩೪೯	೦೩೬೬	೦೩೮೪	೦೪೦೧	೦೪೧೯	೦೪೩೬	೦೪೫೪	೦೪೭೧	೦೪೮೮	೦೫೦೬	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೩	.೦೫೨೩	೦೫೪೧	೦೫೫೮	೦೫೭೬	೦೫೯೩	೦೬೧೦	೦೬೨೮	೦೬೪೫	೦೬೬೩	೦೬೮೦	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೪	.೦೬೯೮	೦೭೧೫	೦೭೩೨	೦೭೫೦	೦೭೬೭	೦೭೮೫	೦೮೦೨	೦೮೧೯	೦೮೩೭	೦೮೫೪	೩	೬	೯	೧೨	೧೪
೫	.೦೮೭೨	೦೮೮೯	೦೯೦೬	೦೯೨೪	೦೯೪೧	೦೯೫೮	೦೯೭೬	೦೯೯೩	೧೦೧೧	೧೦೨೮	೩	೬	೯	೧೨	೧೪
೬	.೧೦೪೫	೧೦೬೩	೧೦೮೦	೧೦೯೭	೧೧೧೫	೧೧೩೨	೧೧೪೯	೧೧೬೭	೧೧೮೪	೧೨೦೧	೩	೬	೯	೧೨	೧೪
೭	.೧೨೧೯	೧೨೩೬	೧೨೫೩	೧೨೭೧	೧೨೮೮	೧೩೦೫	೧೩೨೩	೧೩೪೦	೧೩೫೭	೧೩೭೪	೩	೬	೯	೧೨	೧೪
೮	.೧೩೯೨	೧೪೦೯	೧೪೨೬	೧೪೪೪	೧೪೬೧	೧೪೭೮	೧೪೯೫	೧೫೧೩	೧೫೩೦	೧೫೪೭	೩	೬	೯	೧೨	೧೪
೯	.೧೫೬೪	೧೫೮೨	೧೫೯೯	೧೬೧೬	೧೬೩೩	೧೬೫೦	೧೬೬೮	೧೬೮೫	೧೭೦೨	೧೭೧೯	೩	೬	೯	೧೨	೧೪
೧೦	.೧೭೩೬	೧೭೫೪	೧೭೭೧	೧೭೮೮	೧೮೦೫	೧೮೨೨	೧೮೪೦	೧೮೫೭	೧೮೭೪	೧೮೯೧	೩	೬	೯	೧೧	೧೪
೧೧	.೧೯೦೮	೧೯೨೫	೧೯೪೨	೧೯೫೯	೧೯೭೭	೧೯೯೪	೨೦೧೧	೨೦೨೮	೨೦೪೫	೨೦೬೨	೩	೬	೯	೧೧	೧೪
೧೨	.೨೦೭೯	೨೦೯೬	೨೧೧೩	೨೧೩೦	೨೧೪೭	೨೧೬೪	೨೧೮೧	೨೧೯೮	೨೨೧೫	೨೨೩೨	೩	೬	೯	೧೧	೧೪
೧೩	.೨೨೫೦	೨೨೬೭	೨೨೮೪	೨೩೦೦	೨೩೧೭	೨೩೩೪	೨೩೫೧	೨೩೬೮	೨೩೮೫	೨೪೦೨	೩	೬	೮	೧೧	೧೪
೧೪	.೨೪೧೯	೨೪೩೬	೨೪೫೩	೨೪೭೦	೨೪೮೭	೨೫೦೪	೨೫೨೧	೨೫೩೮	೨೫೫೪	೨೫೭೧	೩	೬	೮	೧೧	೧೪
೧೫	.೨೫೮೮	೨೬೦೫	೨೬೨೨	೨೬೩೯	೨೬೫೬	೨೬೭೨	೨೬೮೯	೨೭೦೬	೨೭೨೩	೨೭೪೦	೩	೬	೮	೧೧	೧೪
೧೬	.೨೭೫೬	೨೭೭೩	೨೭೯೦	೨೮೦೭	೨೮೨೩	೨೮೪೦	೨೮೫೭	೨೮೭೪	೨೮೯೦	೨೯೦೭	೩	೬	೮	೧೧	೧೪
೧೭	.೨೯೨೪	೨೯೪೦	೨೯೫೭	೨೯೭೪	೨೯೯೦	೩೦೦೭	೩೦೨೪	೩೦೪೦	೩೦೫೭	೩೦೭೪	೩	೬	೮	೧೧	೧೪
೧೮	.೩೦೯೦	೩೧೦೭	೩೧೨೩	೩೧೪೦	೩೧೫೬	೩೧೭೩	೩೧೯೦	೩೨೦೬	೩೨೨೩	೩೨೩೯	೩	೬	೮	೧೧	೧೪
೧೯	.೩೨೫೬	೩೨೭೨	೩೨೮೯	೩೩೦೫	೩೩೨೨	೩೩೩೮	೩೩೫೫	೩೩೭೧	೩೩೮೭	೩೪೦೪	೩	೫	೮	೧೧	೧೪

೨೦	.೩೪೨೦	೩೪೩೭	೩೪೫೩	೩೪೬೯	೩೪೮೬	೩೫೦೨	೩೫೧೮	೩೫೩೫	೩೫೫೧	೩೫೬೭	೩	೫	೮	೧೧	೧೪
೨೧	.೩೫೮೪	೩೬೦೦	೩೬೧೬	೩೬೩೩	೩೬೪೯	೩೬೬೫	೩೬೮೧	೩೬೯೭	೩೭೧೪	೩೭೩೦	೩	೫	೮	೧೧	೧೪
೨೨	.೩೭೪೬	೩೭೬೨	೩೭೭೮	೩೭೯೫	೩೮೧೧	೩೮೨೭	೩೮೪೩	೩೮೫೯	೩೮೭೫	೩೮೯೧	೩	೫	೮	೧೧	೧೩
೨೩	.೩೯೦೭	೩೯೨೩	೩೯೩೯	೩೯೫೫	೩೯೭೧	೩೯೮೭	೪೦೦೩	೪೦೧೯	೪೦೩೫	೪೦೫೧	೩	೫	೮	೧೧	೧೩
೨೪	.೪೦೬೭	೪೦೮೩	೪೦೯೯	೪೧೧೫	೪೧೩೧	೪೧೪೭	೪೧೬೩	೪೧೭೯	೪೧೯೫	೪೨೧೦	೩	೫	೮	೧೧	೧೩
೨೫	.೪೨೨೬	೪೨೪೨	೪೨೫೮	೪೨೭೪	೪೨೮೯	೪೩೦೫	೪೩೨೧	೪೩೩೭	೪೩೫೨	೪೩೬೮	೩	೫	೮	೧೧	೧೩
೨೬	.೪೩೮೪	೪೩೯೯	೪೪೧೫	೪೪೩೧	೪೪೪೬	೪೪೬೨	೪೪೭೮	೪೪೯೩	೪೫೦೯	೪೫೨೪	೩	೫	೮	೧೦	೧೩
೨೭	.೪೫೪೦	೪೫೫೫	೪೫೭೧	೪೫೮೬	೪೬೦೨	೪೬೧೭	೪೬೩೩	೪೬೪೮	೪೬೬೪	೪೬೭೯	೩	೫	೮	೧೦	೧೩
೨೮	.೪೬೯೫	೪೭೧೦	೪೭೨೬	೪೭೪೧	೪೭೫೬	೪೭೭೨	೪೭೮೭	೪೮೦೨	೪೮೧೮	೪೮೩೩	೩	೫	೮	೧೦	೧೩
೨೯	.೪೮೪೮	೪೮೬೩	೪೮೭೯	೪೮೯೪	೪೯೦೯	೪೯೨೪	೪೯೩೯	೪೯೫೫	೪೯೭೦	೪೯೮೫	೩	೫	೮	೧೦	೧೩
೩೦	.೫೦೦೦	೫೦೧೫	೫೦೩೦	೫೦೪೫	೫೦೬೦	೫೦೭೫	೫೦೯೦	೫೧೦೫	೫೧೨೦	೫೧೩೫	೩	೫	೮	೧೦	೧೩
೩೧	.೫೧೫೦	೫೧೬೫	೫೧೮೦	೫೧೯೫	೫೨೧೦	೫೨೨೫	೫೨೪೦	೫೨೫೫	೫೨೭೦	೫೨೮೪	೨	೫	೭	೧೦	೧೨
೩೨	.೫೨೯೯	೫೩೧೪	೫೩೨೯	೫೩೪೪	೫೩೫೮	೫೩೭೩	೫೩೮೮	೫೪೦೨	೫೪೧೭	೫೪೩೨	೨	೫	೭	೧೦	೧೨
೩೩	.೫೪೪೬	೫೪೬೧	೫೪೭೬	೫೪೯೦	೫೫೦೫	೫೫೧೯	೫೫೩೪	೫೫೪೮	೫೫೬೩	೫೫೭೭	೨	೫	೭	೧೦	೧೨
೩೪	.೫೫೯೨	೫೬೦೬	೫೬೨೧	೫೬೩೫	೫೬೫೦	೫೬೬೪	೫೬೭೮	೫೬೯೩	೫೭೦೭	೫೭೨೧	೨	೫	೭	೧೦	೧೨
೩೫	.೫೭೩೬	೫೭೫೦	೫೭೬೪	೫೭೭೯	೫೭೯೩	೫೮೦೭	೫೮೨೧	೫೮೩೫	೫೮೫೦	೫೮೬೪	೨	೫	೭	೯	೧೨
೩೬	.೫೮೭೮	೫೮೯೨	೫೯೦೬	೫೯೨೦	೫೯೩೪	೫೯೪೮	೫೯೬೨	೫೯೭೬	೫೯೯೦	೬೦೦೪	೨	೫	೭	೯	೧೨
೩೭	.೬೦೧೮	೬೦೩೨	೬೦೪೬	೬೦೬೦	೬೦೭೪	೬೦೮೮	೬೧೦೧	೬೧೧೫	೬೧೨೯	೬೧೪೩	೨	೫	೭	೯	೧೨
೩೮	.೬೧೫೭	೬೧೭೦	೬೧೮೪	೬೧೯೮	೬೨೧೧	೬೨೨೫	೬೨೩೯	೬೨೫೨	೬೨೬೬	೬೨೮೦	೨	೫	೭	೯	೧೧
೩೯	.೬೨೯೩	೬೩೦೭	೬೩೨೦	೬೩೩೪	೬೩೪೭	೬೩೬೧	೬೩೭೪	೬೩೮೮	೬೪೦೧	೬೪೧೪	೨	೪	೭	೯	೧೧
೪೦	.೬೪೨೮	೬೪೪೧	೬೪೫೫	೬೪೬೮	೬೪೮೧	೬೪೯೪	೬೫೦೮	೬೫೨೧	೬೫೩೪	೬೫೪೭	೨	೪	೭	೯	೧೧
೪೧	.೬೫೬೧	೬೫೭೪	೬೫೮೭	೬೬೦೦	೬೬೧೩	೬೬೨೬	೬೬೩೯	೬೬೫೨	೬೬೬೫	೬೬೭೮	೨	೪	೭	೯	೧೧
೪೨	.೬೬೯೧	೬೭೦೪	೬೭೧೭	೬೭೩೦	೬೭೪೩	೬೭೫೬	೬೭೬೯	೬೭೮೨	೬೭೯೪	೬೮೦೭	೨	೪	೬	೯	೧೧
೪೩	.೬೮೨೦	೬೮೩೩	೬೮೪೫	೬೮೫೮	೬೮೭೧	೬೮೮೪	೬೮೯೬	೬೯೦೯	೬೯೨೧	೬೯೩೪	೨	೪	೬	೮	೧೧
೪೪	.೬೯೪೭	೬೯೫೯	೬೯೭೨	೬೯೮೪	೬೯೯೭	೭೦೦೯	೭೦೨೨	೭೦೩೪	೭೦೪೬	೭೦೫೯	೨	೪	೬	೮	೧೦

ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ

ಅಂಶ	೦'	೬'	೧೨'	೧೮'	೨೪'	೩೦'	೩೬'	೪೨'	೪೮'	೫೪'	ಮಧ್ಯಮಾನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ೧'	೨'	೩'	೪'	೫'
೪೫	.೭೦೭೧	೭೦೮೩	೭೦೯೬	೭೧೦೮	೭೧೨೦	೭೧೩೩	೭೧೪೫	೭೧೫೭	೭೧೬೯	೭೧೮೧	೨	೪	೬	೮	೧೦
೪೬	.೭೧೯೩	೭೨೦೬	೭೨೧೮	೭೨೩೦	೭೨೪೨	೭೨೫೪	೭೨೬೬	೭೨೭೮	೭೨೯೦	೭೩೦೨	೨	೪	೬	೮	೧೦
೪೭	.೭೩೧೪	೭೩೨೫	೭೩೩೭	೭೩೪೯	೭೩೬೧	೭೩೭೩	೭೩೮೫	೭೩೯೬	೭೪೦೮	೭೪೨೦	೨	೪	೬	೮	೧೦
೪೮	.೭೪೩೧	೭೪೪೩	೭೪೫೫	೭೪೬೬	೭೪೭೮	೭೪೯೦	೭೫೦೧	೭೫೧೩	೭೫೨೪	೭೫೩೬	೨	೪	೬	೮	೧೦
೪೯	.೭೫೪೭	೭೫೫೯	೭೫೭೦	೭೫೮೧	೭೫೯೩	೭೬೦೪	೭೬೧೫	೭೬೨೭	೭೬೩೮	೭೬೪೯	೨	೪	೬	೮	೯
೫೦	.೭೬೬೦	೭೬೭೨	೭೬೮೩	೭೬೯೪	೭೭೦೫	೭೭೧೬	೭೭೨೭	೭೭೩೮	೭೭೪೯	೭೭೬೦	೨	೪	೬	೭	೯
೫೧	.೭೭೭೧	೭೭೮೨	೭೭೯೩	೭೮೦೪	೭೮೧೫	೭೮೨೬	೭೮೩೭	೭೮೪೮	೭೮೫೯	೭೮೬೯	೨	೪	೫	೭	೯
೫೨	.೭೮೮೦	೭೮೯೧	೭೯೦೨	೭೯೧೨	೭೯೨೩	೭೯೩೪	೭೯೪೪	೭೯೫೫	೭೯೬೫	೭೯೭೬	೨	೪	೫	೭	೯
೫೩	.೭೯೮೬	೭೯೯೭	೮೦೦೭	೮೦೧೮	೮೦೨೮	೮೦೩೯	೮೦೪೯	೮೦೫೯	೮೦೭೦	೮೦೮೦	೨	೩	೫	೭	೯
೫೪	.೮೦೯೦	೮೧೦೦	೮೧೧೧	೮೧೨೧	೮೧೩೧	೮೧೪೧	೮೧೫೧	೮೧೬೧	೮೧೭೧	೮೧೮೧	೨	೩	೫	೭	೮
೫೫	.೮೧೯೨	೮೨೦೨	೮೨೧೧	೮೨೨೧	೮೨೩೧	೮೨೪೧	೮೨೫೧	೮೨೬೧	೮೨೭೧	೮೨೮೧	೨	೩	೫	೭	೮
೫೬	.೮೨೯೦	೮೩೦೦	೮೩೧೦	೮೩೨೦	೮೩೨೯	೮೩೩೯	೮೩೪೮	೮೩೫೮	೮೩೬೮	೮೩೭೭	೨	೩	೫	೬	
೫೭	.೮೩೮೭	೮೩೯೬	೮೪೦೬	೮೪೧೫	೮೪೨೫	೮೪೩೪	೮೪೪೩	೮೪೫೩	೮೪೬೨	೮೪೭೧	೨	೩	೫	೬	೮
೫೮	.೮೪೮೦	೮೪೯೦	೮೪೯೯	೮೫೦೮	೮೫೧೭	೮೫೨೬	೮೫೩೬	೮೫೪೫	೮೫೫೪	೮೫೬೩	೨	೩	೫	೬	೮
೫೯	.೮೫೭೨	೮೫೮೧	೮೫೯೦	೮೫೯೯	೮೬೦೭	೮೬೧೬	೮೬೨೫	೮೬೩೪	೮೬೪೩	೮೬೫೨	೧	೩	೪	೬	೭
೬೦	.೮೬೬೦	೮೬೬೯	೮೬೭೮	೮೬೮೬	೮೬೯೫	೮೭೦೪	೮೭೧೨	೮೭೨೧	೮೭೨೯	೮೭೩೮	೧	೩	೪	೬	೭
೬೧	.೮೭೪೬	೮೭೫೫	೮೭೬೩	೮೭೭೧	೮೭೮೦	೮೭೮೮	೮೭೯೬	೮೮೦೫	೮೮೧೩	೮೮೨೧	೧	೩	೪	೬	೭
೬೨	.೮೮೨೯	೮೮೩೮	೮೮೪೬	೮೮೫೪	೮೮೬೨	೮೮೭೦	೮೮೭೮	೮೮೮೬	೮೮೯೪	೮೯೦೨	೧	೩	೪	೫	೭
೬೩	.೮೯೧೦	೮೯೧೮	೮೯೨೬	೮೯೩೪	೮೯೪೨	೮೯೪೯	೮೯೫೭	೮೯೬೫	೮೯೭೩	೮೯೮೦	೧	೩	೪	೫	೬
೬೪	.೮೯೮೮	೮೯೯೬	೯೦೦೩	೯೦೧೧	೯೦೧೮	೯೦೨೬	೯೦೩೩	೯೦೪೧	೯೦೪೮	೯೦೫೬	೧	೩	೪	೫	೬

೬೫	.೯೦೬೩	೯೦೭೦	೯೦೭೮	೯೦೮೫	೯೦೯೨	೯೧೦೦	೯೧೦೭	೯೧೧೪	೯೧೨೧	೯೧೨೮	೧	೨	೪	೫	೬
೬೬	.೯೧೩೫	೯೧೪೩	೯೧೫೦	೯೧೫೭	೯೧೬೪	೯೧೭೧	೯೧೭೮	೯೧೮೪	೯೧೯೧	೯೧೯೮	೧	೨	೩	೫	೬
೬೭	.೯೨೦೫	೯೨೧೨	೯೨೧೯	೯೨೨೫	೯೨೩೨	೯೨೩೯	೯೨೪೫	೯೨೫೨	೯೨೫೯	೯೨೬೫	೧	೨	೩	೪	೬
೬೮	.೯೨೭೨	೯೨೭೮	೯೨೮೫	೯೨೯೧	೯೨೯೮	೯೩೦೪	೯೩೧೧	೯೩೧೭	೯೩೨೩	೯೩೩೦	೧	೨	೩	೪	೫
೬೯	.೯೩೩೬	೯೩೪೨	೯೩೪೮	೯೩೫೪	೯೩೬೧	೯೩೬೭	೯೩೭೩	೯೩೭೯	೯೩೮೫	೯೩೯೧	೧	೨	೩	೪	೫
೭೦	.೯೩೯೭	೯೪೦೩	೯೪೦೯	೯೪೧೫	೯೪೨೧	೯೪೨೬	೯೪೩೨	೯೪೩೮	೯೪೪೪	೯೪೪೯	೧	೨	೩	೪	೫
೭೧	.೯೪೫೫	೯೪೬೧	೯೪೬೬	೯೪೭೨	೯೪೭೮	೯೪೮೩	೯೪೮೯	೯೪೯೪	೯೫೦೦	೯೫೦೫	೧	೨	೩	೪	೫
೭೨	.೯೫೧೧	೯೫೧೬	೯೫೨೧	೯೫೨೭	೯೫೩೨	೯೫೩೭	೯೫೪೨	೯೫೪೮	೯೫೫೩	೯೫೫೮	೧	೨	೩	೪	೪
೭೩	.೯೫೬೩	೯೫೬೮	೯೫೭೩	೯೫೭೮	೯೫೮೩	೯೫೮೮	೯೫೯೩	೯೫೯೮	೯೬೦೩	೯೬೦೮	೧	೨	೨	೩	೪
೭೪	.೯೬೧೩	೯೬೧೭	೯೬೨೨	೯೬೨೭	೯೬೩೨	೯೬೩೬	೯೬೪೧	೯೬೪೬	೯೬೫೦	೯೬೫೫	೧	೨	೨	೩	೪
೭೫	.೯೬೫೯	೯೬೬೪	೯೬೬೮	೯೬೭೩	೯೬೭೭	೯೬೮೧	೯೬೮೬	೯೬೯೦	೯೬೯೪	೯೬೯೯	೧	೧	೨	೩	೪
೭೬	.೯೭೦೩	೯೭೦೭	೯೭೧೧	೯೭೧೫	೯೭೨೦	೯೭೨೪	೯೭೨೮	೯೭೩೨	೯೭೩೬	೯೭೪೦	೧	೧	೨	೩	೩
೭೭	.೯೭೪೪	೯೭೪೮	೯೭೫೧	೯೭೫೫	೯೭೫೯	೯೭೬೩	೯೭೬೭	೯೭೭೦	೯೭೭೪	೯೭೭೮	೧	೧	೨	೩	೩
೭೮	.೯೭೮೧	೯೭೮೫	೯೭೮೯	೯೭೯೨	೯೭೯೬	೯೭೯೯	೯೮೦೩	೯೮೦೬	೯೮೧೦	೯೮೧೩	೧	೧	೨	೨	೩
೭೯	.೯೮೧೬	೯೮೨೦	೯೮೨೩	೯೮೨೬	೯೮೨೯	೯೮೩೩	೯೮೩೬	೯೮೩೯	೯೮೪೨	೯೮೪೫	೧	೧	೨	೨	೩
೮೦	.೯೮೪೮	೯೮೫೧	೯೮೫೪	೯೮೫೭	೯೮೬೦	೯೮೬೩	೯೮೬೬	೯೮೬೯	೯೮೭೧	೯೮೭೪	೦	೧	೧	೨	೨
೮೧	.೯೮೭೭	೯೮೮೦	೯೮೮೨	೯೮೮೫	೯೮೮೮	೯೮೯೦	೯೮೯೩	೯೮೯೫	೯೮೯೮	೯೯೦೦	೦	೧	೧	೨	೨
೮೨	.೯೯೦೩	೯೯೦೫	೯೯೦೭	೯೯೧೦	೯೯೧೨	೯೯೧೪	೯೯೧೭	೯೯೧೯	೯೯೨೧	೯೯೨೩	೦	೧	೧	೨	೨
೮೩	.೯೯೨೫	೯೯೨೮	೯೯೩೦	೯೯೩೨	೯೯೩೪	೯೯೩೬	೯೯೩೮	೯೯೪೦	೯೯೪೨	೯೯೪೩	೦	೧	೧	೧	೨
೮೪	.೯೯೪೫	೯೯೪೭	೯೯೪೯	೯೯೫೧	೯೯೫೨	೯೯೫೪	೯೯೫೬	೯೯೫೭	೯೯೫೯	೯೯೬೦	೦	೧	೧	೧	೧
೮೫	.೯೯೬೨	೯೯೬೩	೯೯೬೫	೯೯೬೬	೯೯೬೮	೯೯೬೯	೯೯೭೧	೯೯೭೨	೯೯೭೩	೯೯೭೪	೦	೦	೧	೧	೧
೮೬	.೯೯೭೬	೯೯೭೭	೯೯೭೮	೯೯೭೯	೯೯೮೦	೯೯೮೧	೯೯೮೨	೯೯೮೩	೯೯೮೪	೯೯೮೫	೦	೦	೧	೧	೧
೮೭	.೯೯೮೬	೯೯೮೭	೯೯೮೮	೯೯೮೯	೯೯೯೦	೯೯೯೦	೯೯೯೧	೯೯೯೨	೯೯೯೩	೯೯೯೩	೦	೦	೦	೧	೧
೮೮	.೯೯೯೪	೯೯೯೫	೯೯೯೫	೯೯೯೬	೯೯೯೬	೯೯೯೭	೯೯೯೭	೯೯೯೭	೯೯೯೮	೯೯೯೮	೦	೦	೦	೦	೦
೮೯	.೯೯೯೮	೯೯೯೯	೯೯೯೯	೯೯೯೯	೯೯೯೯	೧.೦೦೦	೧.೦೦೦	೧.೦೦೦	೧.೦೦೦	೧.೦೦೦	೦	೦	೦	೦	೦

ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾ

ಅಂಶ	೦'	೬'	೧೨'	೧೮'	೨೪'	೩೦'	೩೬'	೪೨'	೪೮'	೫೪'	ಮಧ್ಯಮಾನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ೧'	೨'	೩'	೪'	೫'
೦	.೦೦೦೦	೦೦೧೭	೦೦೩೫	೦೦೫೨	೦೦೭೦	೦೦೮೭	೦೧೦೫	೦೧೨೨	೦೧೪೦	೦೧೫೭	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೧	.೦೧೭೫	೦೧೯೨	೦೨೦೯	೦೨೨೭	೦೨೪೪	೦೨೬೨	೦೨೭೯	೦೨೯೭	೦೩೧೪	೦೩೩೨	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೨	.೦೩೪೯	೦೩೬೭	೦೩೮೪	೦೪೦೨	೦೪೧೯	೦೪೩೭	೦೪೫೪	೦೪೭೨	೦೪೮೯	೦೫೦೭	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೩	.೦೫೨೪	೦೫೪೨	೦೫೫೯	೦೫೭೭	೦೫೯೪	೦೬೧೨	೦೬೨೯	೦೬೪೭	೦೬೬೪	೦೬೮೨	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೪	.೦೬೯೯	೦೭೧೭	೦೭೩೪	೦೭೫೨	೦೭೬೯	೦೭೮೭	೦೮೦೫	೦೮೨೨	೦೮೪೦	೦೮೫೭	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೫	.೦೮೭೫	೦೮೯೨	೦೯೧೦	೦೯೨೮	೦೯೪೫	೦೯೬೩	೦೯೮೧	೦೯೯೮	೧೦೧೬	೧೦೩೩	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೬	.೧೦೫೧	೧೦೬೯	೧೦೮೬	೧೧೦೪	೧೧೨೨	೧೧೩೯	೧೧೫೭	೧೧೭೫	೧೧೯೨	೧೨೧೦	೩	೭	೯	೧೨	೧೫
೭	.೧೨೨೮	೧೨೪೬	೧೨೬೩	೧೨೮೧	೧೨೯೯	೧೩೧೭	೧೩೩೪	೧೩೫೨	೧೩೭೦	೧೩೮೮	೩	೭	೯	೧೨	೧೫
೮	.೧೪೦೫	೧೪೨೩	೧೪೪೧	೧೪೫೯	೧೪೭೭	೧೪೯೫	೧೫೧೨	೧೫೩೦	೧೫೪೮	೧೫೬೬	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೯	.೧೫೮೪	೧೬೦೨	೧೬೨೦	೧೬೩೮	೧೬೫೫	೧೬೭೩	೧೬೯೧	೧೭೦೯	೧೭೨೭	೧೭೪೫	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೧೦	.೧೭೬೩	೧೭೮೧	೧೭೯೯	೧೮೧೭	೧೮೩೫	೧೮೫೩	೧೮೭೧	೧೮೯೦	೧೯೦೮	೧೯೨೬	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೧೧	.೧೯೪೪	೧೯೬೨	೧೯೮೦	೧೯೯೮	೨೦೧೬	೨೦೩೫	೨೦೫೩	೨೦೭೧	೨೦೮೯	೨೧೦೭	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೧೨	.೨೧೨೬	೨೧೪೪	೨೧೬೨	೨೧೮೦	೨೧೯೯	೨೨೧೭	೨೨೩೫	೨೨೫೪	೨೨೭೨	೨೨೯೦	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೧೩	೨೩೦೯	೨೩೨೭	೨೩೪೫	೨೩೬೪	೨೩೮೨	೨೪೦೧	೨೪೧೯	೨೪೩೮	೨೪೫೬	೨೪೭೫	೩	೬	೯	೧೨	೧೫
೧೪	೨೪೯೩	೨೫೧೨	೨೫೩೦	೨೫೪೯	೨೫೬೮	೨೫೮೬	೨೬೦೫	೨೬೨೩	೨೬೪೨	೨೬೬೧	೩	೬	೯	೧೨	೧೬
೧೫	.೨೬೭೯	೨೬೯೮	೨೭೧೭	೨೭೩೬	೨೭೫೪	೨೭೭೩	೨೭೯೨	೨೮೧೧	೨೮೩೦	೨೮೪೯	೩	೬	೯	೧೩	೧೬
೧೬	.೨೮೬೭	೨೮೮೬	೨೯೦೫	೨೯೨೪	೨೯೪೩	೨೯೬೨	೨೯೮೧	೩೦೦೦	೩೦೧೯	೩೦೩೮	೩	೬	೯	೧೩	೧೬
೧೭	.೩೦೫೭	೩೦೭೬	೩೦೯೬	೩೧೧೫	೩೧೩೪	೩೧೫೩	೩೧೭೨	೩೧೯೧	೩೨೧೧	೩೨೩೦	೩	೬	೧೦	೧೩	೧೬
೧೮	.೩೨೪೯	೩೨೬೯	೩೨೮೮	೩೩೦೭	೩೩೨೭	೩೩೪೬	೩೩೬೫	೩೩೮೫	೩೪೦೪	೩೪೨೪	೩	೬	೧೦	೧೩	೧೬
೧೯	.೩೪೪೩	೩೪೬೩	೩೪೮೨	೩೫೦೨	೩೫೨೨	೩೫೪೧	೩೫೬೧	೩೫೮೧	೩೬೦೦	೩೬೨೦	೩	೭	೧೦	೧೩	೧೬

౨౦	.౩౬౪౦	౩౬౫౯	౩౬౭౯	౩౬౯౯	౩౭౧౯	౩౭౩౯	౩౦౫౯	౩౭౭౯	౩౭౯౯	౩౮౧౯	౩	౭	౧౦	౧౩	౧౭
౨౧	.౩౮౩౯	౨౮౫౯	౩౮౭౯	౩౮౯౯	౩౯౧౯	౩౯౩౯	౩౯౫౯	౩౯౭౯	౪౦౦౦	౪౦౨౦	౩	౭	౧౦	౧౩	౧౭
౨౨	.౪౦౪౦	౪౦౬౧	౪౦౮౧	౪౧౦౧	౪౧౨౨	౪౦౪౯	౪౧౬౩	౪౧౮౩	౪౨౦౪	౪౨౨౪	౩	౭	౧౦	౧౪	౧౭
౨౩	.౪౨౪౫	౪౨౬౫	౪౨౮౬	౪౩౦౭	౪౩౨౭	౪౩౪౮	౪౩౬౯	౪౩౯౦	౪౪౧౧	౪౪౩౧	౩	౭	౧౦	౧౪	౧౭
౨౪	.౪౪౫౨	౪౪౭౩	౪౪౯౪	౪౫౧౫	౪౫౩౬	౪౫౫౭	౪౫౭౮	౪౫౯౯	౪౬౨౧	౪౬౪౨	౪	౭	౧౧	౧౪	౧౮
౨౫	.౪౬౬౩	౪౬౮౪	౪౭౦౬	౪౭౨౭	౪౭౪౮	౪౭౭౦	౪౭౯౧	౪౮౧౩	౪౮౩౪	౪౮౫౬	౪	౭	౧౧	౧౪	౧౮
౨౬	.౪౮౭౭	౪౮౯౯	౪౯౨౧	౪౯౪౨	౪౯౬౪	౪౯౮౬	౫౦౦౮	౫౦౨౯	౫౦౫౧	౫౦౭౩	౪	౭	౧౧	౧౫	౧౮
౨౭	.౫౦౯౫	౫౧౧౭	౫౧౩౯	౫౧౬౧	౫౧౮౪	౫౨౦౬	౫౨౨౮	౫౨౫౦	౫౨౭౨	౫౨౯౫	౪	౭	౧౧	౧౫	౧౮
౨౮	.౫౩౧౭	౫౩౪౦	౫౩౬౨	౫౩౮౪	౫౪౦౭	౫౪౩౦	౫౪౫౨	౫౪౭౫	౫౪౯౮	౫౫౨౦	౪	౮	౧౧	౧౫	౧౯
౨౯	.౫౫౪౩	౫౫౬౬	౫౫౮౯	౫౬౧౨	౫౬౩౫	౫౬౫౮	౫౬౮౧	౫౭౦౪	౫౭౨౭	౫౭౫౦	౪	౮	౧౨	౧౫	౧౯
౩౦	.౫౭౭౪	౫౭౯౭	౫౮౨౦	౫౮౪౪	౫౮౬౭	౫౮౯౦	౫౯౧౪	౫౯౩౮	౫౯౬౧	౫౯౮౫	౪	౮	౧౨	౧౬	౨౦
౩౧	.౬౦౦౯	౬౦౩౨	౬౦౫౬	౬౦౮౦	౬౧౦౪	౬౧౨౮	౬౧౫౨	౬౧౭౬	౬౨౦౦	౬౨౨౪	౪	౮	౧౨	౧౬	౨౦
౩౨	.౬౨౪౯	౬౨౭౩	౬౨౯౭	౬౩౨౨	౬౩౪౬	౬౩౭౧	౬౩౯౫	౬౪౨౦	౬౪౪౫	౬౪౬౯	౪	౮	౧౨	౧౬	౨౦
౩౩	.౬౪౯౪	౬౫౧౯	౬౫౪౪	౬౫౬౯	౬౫౯౪	౬౬౧౯	౬౬౪౪	౬౬౬౯	౬౬౯౪	౬౭౨౦	౪	౮	౧౩	౧౭	౨౧
౩౪	.౬౭౪౫	౬౭౭౧	౬౭౯౬	౬౮౨౨	౬౮౪౭	౬౮౭౩	౬౮౯౯	౬౯౨౪	౬౯౫౦	౬౯౭౬	౪	౯	౧౩	౧౭	౨౧
౩౫	.౭౦౦౨	౭౦౨౮	౭౦౫౪	౭౦౮౦	౭౧౦౭	౭౧౩౩	౭౧౫౯	౭౧౮౬	౭౨౧౨	౭౨౩౯	౪	౯	౧౩	౧౮	౨౨
౩౬	.౭౨౬౫	౭౨౯౨	౭౩౧౯	౭౩౪౬	౭౩౭౩	౭౪౦౦	౭౪౨౭	౭౪౫౪	౭౪౮౧	౭౫౦౮	౫	౯	౧౪	౧౮	౨౩
౩౭	.౭౫౩౬	౭౫౬౩	౭౫౯౦	౭౬౧౮	౭౬౪౬	౭౬౭౩	౭౭౦౧	౭౭౨౯	౭౭౫౭	౭౭౮౫	౫	౯	౧౪	౧౮	౨౩
౩౮	.౭౮౧౩	౭౮౪౧	౭౮౬౯	౭౮౯౮	౭౯౨౬	౭౯౫౪	౭౯౮౩	౮౦౧౨	౮౦౪౦	౮౦౬౯	౫	౯	౧౪	౧౯	౨౪
౩౯	.౮౦౯౮	౮౧౨౭	౮౧౫౬	౮౧౮౫	౮౨౧౪	౮౨౪౩	౮౨౭౩	౮౩౦౨	౮౩౩౨	౮౩౬౧	౫	౧౦	౧౫	౨౦	౨౪
౪౦	౮౩౯౧	౮౪౨౧	౮౪౫౧	౮౪౮౧	౮౫౧౧	౮౫౪౧	౮౫౭౧	౮౬౦౧	౮౬౩౨	౮౬౬౨	౫	౧౦	౧౫	౨౦	౨౫
౪౧	.౮౬౯౩	౮౭౨౪	౮౭౫౪	౮౭౮౫	౮౮౧౬	౮౮౪౭	౮౮౭౮	౮౯౧౦	౮౯౪౧	౮౯౭౨	౫	౧౦	౧౬	౨౧	౨౬
౪౨	.౯౦౦౪	౯౦౩౬	౯౦౬౭	౯౦౯౯	౯౧౩౧	౯౧౬౩	౯౧౯౫	౯౨౨౮	౯౨౬౦	౯౨౯౩	౫	౧౧	౧౬	౨౧	౨౭
౪౩	౯౩౨౫	౯౩౫౮	౯౩౯౧	౯౪౨౪	౯౪౫౭	౯౪౯౦	౯౫౨౩	౯౫౫౬	౯౫౯౦	౯౬౨౩	౬	౧౧	౧౭	౨౨	౨౮
౪౪	.౯౬౫౭	౯౬౯౧	౯౭౨౫	౯౭౫౯	౯౭౯౩	౯౮౨౭	౯౮౬౧	౯౮౯౬	౯౯౩౦	౯౯౬౫	౬	౧౧	౧౭	౨౩	౨౯

ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ

ಅಂಶ	೦'	೬'	೧೨'	೧೮'	೨೪'	೩೦'	೩೬'	೪೨'	೪೮'	೫೪'	ಮಧ್ಯಮಾನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ೧'	೨'	೩'	೪'	೫'
೪೫	೧.೦೦೦೦	೦೦೩೫	೦೦೭೦	೦೧೦೫	೦೧೪೧	೦೧೭೬	೦೨೧೨	೦೨೪೭	೦೨೮೩	೦೩೧೯	೬	೧೨	೧೮	೨೪	೩೦
೪೬	೧.೦೩೫೫	೦೩೯೨	೦೪೨೮	೦೪೬೪	೦೫೦೧	೦೫೩೮	೦೫೭೫	೦೬೧೨	೦೬೪೯	೦೬೮೬	೬	೧೨	೧೮	೨೫	೩೧
೪೭	೧.೦೭೨೪	೦೭೬೧	೦೭೯೯	೦೮೩೭	೦೮೭೫	೦೯೧೩	೦೯೫೧	೦೯೯೦	೧೦೨೮	೧೦೬೭	೬	೧೩	೧೯	೨೫	೩೨
೪೮	೧.೧೧೦೬	೧೧೪೫	೧೧೮೪	೧೨೨೪	೧೨೬೩	೧೩೦೩	೧೩೪೩	೧೩೮೩	೧೪೨೩	೧೪೬೩	೭	೧೩	೨೦	೨೭	೩೩
೪೯	೧.೧೫೦೪	೧೫೪೪	೧೫೮೫	೧೬೨೬	೧೬೬೭	೧೭೦೮	೧೭೫೦	೧೭೯೨	೧೮೩೩	೧೮೭೫	೭	೧೪	೨೧	೨೮	೩೪
೫೦	೧.೧೯೧೮	೧೯೬೦	೨೦೦೨	೨೦೪೫	೨೦೮೮	೨೧೩೧	೨೧೭೪	೨೨೧೮	೨೨೬೧	೨೩೦೫	೭	೧೪	೨೨	೨೯	೩೬
೫೧	೧.೨೩೪೯	೨೩೯೩	೨೪೩೭	೨೪೮೨	೨೫೨೭	೨೫೭೨	೨೬೧೭	೨೬೬೨	೨೭೦೮	೨೭೫೩	೮	೧೫	೨೩	೩೦	೩೮
೫೨	೧.೨೭೯೯	೨೮೪೬	೨೮೯೨	೨೯೩೮	೨೯೮೫	೩೦೩೨	೩೦೭೯	೩೧೨೭	೩೧೭೫	೩೨೨೨	೮	೧೬	೨೪	೩೧	೩೯
೫೩	೧.೩೨೭೦	೩೩೧೯	೩೩೬೭	೩೪೧೬	೩೪೬೫	೩೫೧೪	೩೫೬೪	೩೬೧೩	೩೬೬೩	೩೭೧೩	೮	೧೬	೨೫	೩೩	೪೧
೫೪	೧.೩೭೬೪	೩೮೧೪	೩೮೬೫	೩೯೧೬	೩೯೬೮	೪೦೧೯	೪೦೭೧	೪೧೨೪	೪೧೭೬	೪೨೨೯	೯	೧೭	೨೬	೩೪	೪೩
೫೫	೧.೪೨೮೧	೪೩೩೫	೪೩೮೮	೪೪೪೨	೪೪೯೬	೪೫೫೦	೪೬೦೫	೪೬೫೯	೪೭೧೫	೪೭೭೦	೯	೧೮	೨೭	೩೬	೪೫
೫೬	೧.೪೮೨೬	೪೮೮೨	೪೯೩೮	೪೯೯೪	೫೦೫೧	೫೧೦೮	೫೧೬೬	೫೨೨೪	೫೨೮೨	೫೩೪೦	೧೦	೧೯	೨೯	೩೮	೪೮
೫೭	೧.೫೩೯೯	೫೪೫೮	೫೫೧೭	೫೫೭೭	೫೬೩೭	೫೬೯೭	೫೭೫೭	೫೮೧೮	೫೮೮೦	೫೯೪೧	೧೦	೨೦	೩೦	೪೦	೫೦
೫೮	೧.೬೦೦೩	೬೦೬೬	೬೧೨೮	೬೧೯೧	೬೨೫೫	೬೩೧೯	೬೩೮೩	೬೪೪೭	೬೫೧೨	೬೫೭೭	೧೧	೨೧	೩೨	೪೩	೫೩
೫೯	೧.೬೬೪೩	೬೭೦೯	೬೭೭೫	೬೮೪೨	೬೯೦೯	೬೯೭೭	೭೦೪೫	೭೧೧೩	೭೧೮೨	೭೨೫೧	೧೧	೨೩	೩೪	೪೫	೫೬
೬೦	೧.೭೩೨೧	೭೩೯೧	೭೪೬೧	೭೫೩೨	೭೬೦೩	೭೬೭೫	೭೭೪೭	೭೮೨೦	೭೮೯೩	೭೯೬೬	೧೨	೨೪	೩೬	೪೮	೬೦
೬೧	೧.೮೦೪೦	೮೧೧೫	೮೧೯೦	೮೨೬೫	೮೩೪೧	೮೪೧೮	೮೪೯೫	೮೫೭೨	೮೬೫೦	೮೭೨೮	೧೩	೨೬	೩೮	೫೧	೬೪
೬೨	೧.೮೮೦೭	೮೮೮೭	೮೯೬೭	೯೦೪೭	೯೧೨೮	೯೨೧೦	೯೨೯೨	೯೩೭೫	೯೪೫೮	೯೫೪೨	೧೪	೨೭	೪೧	೫೫	೬೮
೬೩	೧.೯೬೨೬	೯೭೧೧	೯೭೯೭	೯೮೮೩	೯೯೭೦	೦೦೫೭	೦೧೪೫	೦೨೩೩	೦೩೨೩	೦೪೧೩	೧೫	೨೯	೪೪	೫೮	೭೩
೬೪	೨.೦೫೦೩	೦೫೯೪	೦೬೮೬	೦೭೭೮	೦೮೭೨	೦೯೬೫	೧೦೬೦	೧೧೫೫	೧೨೫೧	೧೩೪೮	೧೬	೩೧	೪೭	೬೩	೭೮

೬೫	೨.೧೪೪೫	೧೫೪೩	೧೬೪೨	೧೭೪೨	೧೮೪೨	೧೯೪೩	೨೦೪೫	೨೧೪೮	೨೨೫೧	೨೩೫೫	೧೭	೩೪	೫೧	೬೮	೮೯
೬೬	೨.೨೪೬೦	೨೫೬೬	೨೬೭೩	೨೭೮೧	೨೮೮೯	೨೯೯೮	೩೧೦೯	೩೨೨೦	೩೩೩೨	೩೪೪೫	೧೮	೩೭	೫೫	೭೩	೯೨
೬೭	೨.೩೫೫೯	೩೬೭೩	೩೭೮೯	೩೯೦೬	೪೦೨೩	೪೧೪೨	೪೨೬೨	೪೩೮೩	೪೫೦೪	೪೬೨೭	೨೦	೪೦	೬೦	೭೯	೯೯
೬೮	೨.೪೭೫೧	೪೮೭೬	೫೦೦೨	೫೧೨೯	೫೨೫೭	೫೩೮೬	೫೫೧೭	೫೬೪೯	೫೭೮೨	೫೯೧೬	೨೨	೪೩	೬೫	೮೭	೧೦೮
೬೯	೨.೬೦೫೧	೬೧೮೭	೬೩೨೫	೬೪೬೪	೬೬೦೫	೬೭೪೬	೬೮೮೯	೭೦೩೪	೭೧೭೯	೭೩೨೬	೨೪	೪೭	೭೧	೯೫	೧೧೯
೭೦	೨.೭೪೭೫	೭೬೨೫	೭೭೭೬	೭೯೨೯	೮೦೮೩	೮೨೩೯	೮೩೯೭	೮೫೫೬	೮೭೧೬	೮೮೭೮	೨೬	೫೨	೭೮	೧೦೪	೧೩೧
೭೧	೨.೯೦೪೨	೯೨೦೮	೯೩೭೫	೯೫೪೪	೯೭೧೪	೯೮೮೭	೦೦೬೧	೦೨೩೭	೦೪೧೫	೦೫೯೫	೨೯	೫೮	೮೭	೧೧೬	೧೪೫
೭೨	೩.೦೭೭೭	೦೯೬೧	೧೧೪೬	೧೩೩೪	೧೫೨೪	೧೭೧೬	೧೯೧೦	೨೧೦೬	೨೩೦೫	೨೫೦೬	೩೨	೬೪	೯೬	೧೨೯	೧೬೧
೭೩	೩.೨೭೦೯	೨೯೧೪	೩೧೨೨	೩೩೩೨	೩೫೪೪	೩೭೫೯	೩೯೭೭	೪೧೯೭	೪೪೨೦	೪೬೪೬	೩೬	೭೨	೧೦೮	೧೪೪	೧೮೦
೭೪	೩.೪೮೭೪	೫೧೦೫	೫೩೩೯	೫೫೭೬	೫೮೧೬	೬೦೫೯	೬೩೦೫	೬೫೫೪	೬೮೦೬	೭೦೬೨	೪೧	೮೧	೧೨೨	೧೬೩	೨೦೪
೭೫	೩.೭೩೨೧	೭೫೮೩	೭೮೪೮	೮೧೧೮	೮೩೯೧	೮೬೬೭	೮೯೪೭	೯೨೩೨	೯೫೨೦	೯೮೧೨	೪೬	೯೩	೧೩೯	೧೮೬	೨೩೨
೭೬	೪.೦೧೦೮	೦೪೦೮	೦೭೧೩	೧೦೨೨	೧೩೩೫	೧೬೫೩	೧೯೭೬	೨೩೦೩	೨೬೩೫	೨೯೭೨	೫೩	೧೦೬	೧೬೦	೨೧೩	೨೬೬
೭೭	೪.೩೩೧೫	೩೬೬೨	೪೦೧೫	೪೩೭೪	೪೭೩೭	೫೧೦೭	೫೪೮೩	೫೮೬೪	೬೨೫೨	೬೬೪೬	೬೨	೧೨೪	೧೮೬	೨೪೮	೩೧೦
೭೮	೪.೭೦೪೬	೭೪೫೩	೭೮೬೭	೮೨೮೭	೮೭೧೬	೯೧೫೨	೯೫೯೪	೦೦೪೫	೦೫೦೪	೦೯೭೦	೭೩	೧೪೬	೨೨೦	೨೯೩	೩೬೬
೭೯	೫.೧೪೪೬	೧೯೨೯	೨೪೨೨	೨೯೨೪	೩೪೩೫	೩೯೫೫	೪೪೮೬	೫೦೨೬	೫೫೭೮	೬೧೪೦	೮೭	೧೭೪	೨೬೨	೩೫೦	೪೩೮
೮೦	೫.೬೭೧೩	೭೨೯೭	೭೮೯೪	೮೫೦೨	೯೧೨೪	೯೭೫೮	೦೪೦೫	೧೦೬೬	೧೭೪೨	೨೪೩೨	ಮಧ್ಯಮಾನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಇಲ್ಲ.				
೮೧	೬.೩೧೩೮	೩೮೫೯	೪೫೯೬	೫೩೫೦	೬೧೨೨	೬೯೧೨	೭೭೨೦	೮೫೪೮	೯೩೯೫	೦೨೬೪					
೮೨	೭.೧೧೫೪	೨೦೬೬	೩೦೦೨	೩೯೬೨	೪೯೪೭	೫೯೫೮	೬೯೯೬	೮೦೬೨	೯೧೫೮	೦೨೮೫					
೮೩	೮.೧೪೪೩	೨೬೩೬	೩೮೬೩	೫೧೨೬	೬೪೨೭	೭೭೬೯	೯೧೫೨	೦೫೭೯	೨೦೫೨	೩೫೭೨					
೮೪	೯.೫೧೪೪	೯.೬೭೭	೯.೮೪೫	೧೦.೯೨	೧೦.೨೦	೧೦.೩೯	೧೦.೫೮	೧೦.೭೮	೧೦.೯೯	೧೧.೨೦					
೮೫	೧೧.೪೩	೧೧.೬೬	೧೧.೯೧	೧೨.೧೬	೧೨.೪೩	೧೨.೭೧	೧೩.೦೦	೧೩.೩೦	೧೩.೬೨	೧೩.೯೫					
೮೬	೧೪.೩೦	೧೪.೬೭	೧೫.೦೬	೧೫.೪೬	೧೫.೮೯	೧೬.೩೫	೧೬.೮೩	೧೭.೩೪	೧೭.೮೯	೧೮.೪೬					
೮೭	೧೯.೦೮	೧೯.೭೪	೨೦.೪೫	೨೧.೨೦	೨೨.೦೨	೨೨.೯೦	೨೩.೮೬	೨೪.೯೦	೨೬.೦೩	೨೭.೨೭					
೮೮	೨೮.೬೪	೩೦.೧೪	೩೧.೮೨	೩೩.೬೯	೩೫.೮೦	೩೮.೧೯	೪೦.೯೨	೪೪.೦೭	೪೭.೭೪	೫೨.೦೮					
೮೯	೫೭.೨೯	೬೩.೬೬	೭೧.೬೨	೮೧.೮೫	೯೫.೪೯	೧೧೪.೬	೧೪೩.೨	೧೯೧.೦	೨೮೬.೫	೫೭೩.೦					

ಪರಿಶಿಷ್ಟ ೧

ಶಾಲಾಂತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರವನ್ನು ತಾಯಿ ನುಡಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಿಕ್ಕೆ ಒಪ್ಪಿಗೆಯಿದೆ. ಆದರೆ ಪ್ರಶ್ನ ಪತ್ರಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಂಗ್ಲೀಷಿನಲ್ಲಿ ಕೊಡುವ ರೂಢಿಯು ಇನ್ನೂ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಬರೆಯುವಾಗ ತೊಂದರೆ ಆಗಬಾರದೆಂದು ಕೇವಲ ಅವರ ತಿಳುವಳಿಕೆಯ ಸಲುವಾಗಿ, ಪ್ರಮೇಯ ಮತ್ತು ಕೃತ್ಯ ಇವುಗಳ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಇಂಗ್ಲೀಷ ರೂಪಾಂತರಗಳನ್ನು ಈ ಪರಿಶಿಷ್ಟದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇದರಡಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಕ್ರಮಾಂಕಗಳು ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿದ್ದ ಕ್ರಮಾಂಕಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿವೆ. ಇದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಸರಿನೋಡುವದು ಸುಲಭವಾಗುವದು.

THEOREMS

27. The area of a rectangle is measured by the product of the measure of its sides.

28. Parallelograms on the same base and between the same parallels are equal in area.

29. Triangles on equal bases and between the same parallels are equal in area.

30. (Converse of Th. 29) Triangles of equal area which are on equal bases in the same straight line, and on the same side of the straight line, are between the same parallels.

31. If a parallelogram and a triangle stand on equal bases and between the same parallels, the area of the parallalo-gram is double that of the triangle.

32. [Pythagoras' Theorem]. In a right-angled triangle, the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the other two sides.

33. (Converse of Pythagoras' Th) If the square on one side of a triangle is equal to the sum of the squares on the other two sides, then the angle contained by these is a right angle.

34. In an obtuse-angled triangle, the square on the side opposite the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the sides containing that angle, *plus* twice the rectangle contained by one of these sides and the projection of the other side upon it.

35. In any triangle, the square on the side opposite to an acute angle is equal to the sum of the squares on the sides containing that angle, *minus* twice the rectangle contained by one of these sides and the projection of the other side upon it.

36. [Apollonius' Theorem]. In any triangle, the sum of the squares on any two sides is equal to twice the square on half the third side together with twice the square on the median which bisects the third side.

37. The locus of a point which is equidistant from two given points is the perpendicular bisector of the straight line joining the two points.

38. The locus of a point which is equidistant from two given intersecting straight lines is the pair of bisectors of the angles between the lines.

39. The perpendicular bisectors of the three sides of a triangle are concurrent.

40. The bisectors of the angles of a triangle are concurrent.

41. The perpendiculars drawn from the vertices of a triangle to the opposite sides are concurrent.

42. The three medians of a triangle are concurrent.

43. The straight line which joins the centre of a circle to the mid-point of a chord (which is not a diameter) is perpendicular to the chord.

44. The straight line drawn from the centre of a circle perpendicular to a chord bisects the chord.

45. The perpendicular bisector of a chord of a circle passes through the centre of the circle.

46. (1) Equal chords of a circle are equidistant from the centre.

(2) Chords of a circle which are equidistant from the centre are equal.

46, A(1) If two chords of a circle are unequal, the greater is nearer the centre.

(2) If two chords of a circle are at unequal distances from the centre, the chord nearer the centre is the greater.

47. There is one circle and only one circle, which passes through three given points not all in the same straight line.

48. The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of the circumference.

49. Angles in the same segment of a circle are equal to one another.

50. (Converse of Th. 49). If the straight line joining two points subtends equal angles at two other points on the same side of it, then the four points lie on a circle.

51. The angle in a semicircle is a right angle; the angle in a segment greater than a semicircle is less than a right angle; and the angle in a segment less than a semicircle is greater than a right angle.

52. The opposite angles of a quadrilateral inscribed in a circle are supplementary.

53. (Converse of Th. 52). If a pair of opposite angles of a quadrilateral are supplementary, the quadrilateral is cyclic.

54. In equal circles, if two arcs subtend equal angles at the centres or at the circumferences, they are equal.

55. (Converse of Th. 54) In equal circles if two arcs are equal, they subtend equal angles at the centres and at the circumferences.

56. In equal circles (or the same circle) if two chords are equal, the arcs which they cut off are equal, the major arc to the major and the minor arc to the minor.

57. (Converse of th. 56). In equal circles (or the same circle) if two arcs are equal, the chords of these arcs are also equal.

58. A line drawn through a point on a circle, perpendicular to the radius to the point, touches the circle at that point.

59. A tangent to a circle is perpendicular to the radius drawn through the point of contact.

60. If two tangents are drawn to a circle from an external point,

(1) the tangents are equal;

(2) they subtend equal angles at the centre of the circle;

(3) they make equal angles with the straight line joining the given point to the centre.

61. If two circles touch one another, the point of contact lies in the straight line joining their centres, or in that line produced.

62. If a straight line touches a circle and, from the point of contact, a chord is drawn, the angles which the chord makes

with the tangent are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.

63. (Converse of Th. 62). If through an extremity of a chord of a circle a straight line is drawn making with the chord an angle equal to the angle in the alternate segment, then the straight line touches the circle.

64. If two chords of a circle intersect at a point within the circle, the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.

65. If two chords of a circle when produced cut at a point outside it, the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.

66. If from a point outside a circle, a secant and a tangent are drawn, the rectangle contained by the whole secant and the part of it outside the circle is equal to the square on the tangent.

67. (Converse of Theorems 64, 65). If two finite straight lines intersect, or being both produced intersect so that the rectangle contained by the segments of the one is equal to that contained by the segments of the other, the extremities of the lines are concyclic.

68. (Converse of Theorem 66). If from a point outside a circle, a secant is drawn, and also another straight line to meet the circle, and if the rectangle contained by the whole secant and the part of it outside the circle is equal to the square on the other line, then this line touches the circle.

69. Triangles of equal altitude have areas proportional to their bases.

70. There is only one point P at which a given finite straight line AB is divided internally in a given ratio $m:n$.

71. There is only one point Q in which a given finite straight line AB is divided externally in a given ratio $m:n$.

72. (1) (Fundamental Theorem). If a straight line is drawn parallel to one side of a triangle, it divides the other two sides proportionally.

(2) *Conversely:* If a straight line divides two sides of a triangle proportionally, it is parallel to the third side.

73. The bisector (internal or external) of an angle of a triangle divides the opposite side (internally or externally) in the ratio of the sides containing the angle bisected.

74. If two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional.

75. If the three sides of one triangle are proportional to the three sides of another triangle, the two triangles are equiangular.

76. If two triangles have an angle of the one equal to an angle of the other and the sides about these equal angles proportional, the triangles are similar.

77. If a perpendicular is drawn from the right angle of a right-angled triangle to the hypotenuse, the triangle on each side of the perpendicular are similar to the whole triangle and to one another.

78. The areas of similar triangles are proportional to the squares on corresponding sides.

CONSTRUCTIONS

12. To construct a rectilineal figure equal in area to a given rectilineal figure and having fewer sides by one than the given figure.

13. To construct a parallelogram equal in area to a given triangle and having one of its angles equal to a given angle.

14. To draw straight lines respectively $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ... units long.

15. To bisect a given arc of a circle.

16. To draw tangents to a circle from an external point.

17. To draw direct common tangents to two circles.

18. To draw transverse common tangents to two given non-intersecting circles.

19. On a given straight line to draw a segment of a circle containing an angle equal to a given angle.

20. To draw the circumcircle of a given triangle.

21. To inscribe a circle in a given triangle.

22. To draw an escribed circle of a triangle.

23. In a given circle, to inscribe a triangle equi-angular to a given triangle.

24. About a given circle to describe a triangle equi-angular to a given triangle.

25. To inscribe a square in a given circle.

26. To circumscribe a circle about a given square.

27. To inscribe a circle in a given square.

28. To describe a square about a given circle.

29. To inscribe a regular hexagon in a given circle.

30. To inscribe a regular octagon in a given circle.

31. To divide a given straight line into two parts in a given ratio, (i) internally (ii) externally.

32. To find the fourth proportional to three given straight lines.

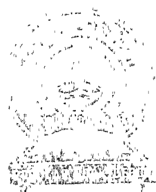
33. To construct the mean proportional between two given straight lines.

ಪರಿಶಿಷ್ಟ ೨.

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳು

Adjacent side-ಸಂಲಗ್ನ ಭುಜ
Alternando-ಏಕಾಂತರ ಕ್ರಿಯೆ
Angle of Elevation-ಉನ್ನತಾಂಶ
Angle of Depression-ಅವನತ ಕೋನ
Arc-ಕಂಸ
Conjugate arc-ಪೂರಕ ಕಂಸ
Major arc-ಬೃಹತ್ ಕಂಸ
Minor arc-ಲಘು ಕಂಸ
Centroid-ಮಧ್ಯಸಂಪಾತ
Circumcircle-ಪರಿವೃತ್ತ
Circumcentre-ಪರಿಕೇಂದ್ರ
Circumradius-ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯ
Coincident-ಏಕರೂಪ
Commensurable-ಪರಿಚ್ಛೇದಶೀಲ
Componendo-ಯೋಗಕ್ರಿಯೆ
Componendo and Dividendo-ಯೋಗ-ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ
Concentric-ಸಮಕೇಂದ್ರ
Concurrent-ಏಕಾಗ್ರ
Concyclic-ವೃತ್ತಸ್ಥ, ಏಕವೃತ್ತೀಯ
Contact-ಸ್ಪರ್ಶ
External c.-ಬಹಿಃಸ್ಪರ್ಶ
Internal c.-ಅಂತಃಸ್ಪರ್ಶ
Corresponding-ಸಂಗತ
Cosine-ಕೋಜ್ಯಾ
Dividendo-ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ
E-circle-ಬಹಿವೃತ್ತ
Equiangular-ಮಿಥಃಸಮಕೋನ
Incircle-ಅಂತವೃತ್ತ
Incommensurable-ಅಪರಿಚ್ಛೇದಶೀಲ
Infinity-ಅನಂತ
Invertendo-ವ್ಯಸ್ತಕ್ರಿಯೆ
Limiting position-ಅಂತಿಮ ಸ್ಥಿತಿ
Locus-ಬಿಂದುಪಥ
Meet-ಸಂಧಿಸುವದು
Nine point circle-ನವ ಬಿಂದು ವೃತ್ತ
Opposite side-ವಿರುದ್ಧ ಭುಜ
Pedal triangle-ಪದತ್ರಿಕೋಣ
Point of concurrence-ಏಕಾಗ್ರ ಬಿಂದು, ಸಂಪಾತ ಬಿಂದು
Point of contact-ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು

Proportion-ಪ್ರಮಾಣ
In p.-ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ
Proportional-ಪ್ರಮಾಣಪದ
Fourth p.-ಚತುರ್ಥ ಪ್ರಮಾಣ
Mean p.-ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣ
Third p.-ತೃತೀಯ ಪ್ರಮಾಣ
Quadrant of a circle-ವರ್ತುಳ ಪಾದ
Regular-ಸುಸಮ, ನಿಯಮಿತ
Scale-ಪ್ರಮಾಣ
Secant-ಛೇದಕ ರೇಖೆ, ಛೇದಿಕೆ
Sector-ವೃತ್ತಕಲೆ
Segment-ಖಂಡ
S. of a circle-ವರ್ತುಳಖಂಡ
Major S.-ಮಹಾನ್ ವರ್ತುಳಖಂಡ
Minor S.-ಲಘು ವರ್ತುಳಖಂಡ
Angle in the S.-ರೇಖಾ ಖಂಡ
Sine-ಜ್ಯಾ
Solving a triangle-ತ್ರಿಕೋನ ಬಿಡಿಸುವದು
Symmetrical-ಸಮಪ್ರಮಾಣ
Tangent-ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ, ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ
Common tangent-ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ
Direct C. T.-ಸರಳ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ
External C. T.-ಬಹಿಃ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ
Internal C. T.-ಅಂತರ್ಗತ ಸಾಧಾರಣ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ
Transverse C. T.-ತಿರ್ಯಕ್ ಸಾ. ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ
Unit-ಏಕಾಂಕ



Plane Geometry for Schools Vol. II, Theoretical & Trigonometry in Kannada for Classes X & XI by Prof. G. V. Bhagwat, M.Sc. 1954. Price Rs. 3-4-0